

ベクトルネットワークアナライザを 使いこなすために

国立大学法人 電気通信大学
産学官連携センター ギガビット研究会

まえがき

このテキストは、電気通信大学産学官連携センターのギガビット研究会が2014年から2019年に開催していた「設計ガイドラインセミナー入門編」用に作成したものである。

ギガビット研究会は、2011年度から2021年度までの10年間、企業と大学を結ぶためのコンソーシアムとして、社会人技術者の再教育や啓蒙活動、大学での成果を企業へ展開する活動、そして共同研究やコンサルテーションを柱とするものとして設立された。特に、技術者の再教育に関しては、日本企業の技術力向上に貢献することを目指し、ほとんどのセミナー業界で行われるようなEMC問題の対処療法的な事例紹介を主内容とするものとは異質の、理論に裏打ちされた考え方、解決手段を学習してもらうことが主眼の大学ならではの特色を打ち出して活動してきた。

高専や大学においては、電気回路と電磁気学とは全く異なる授業科目として履修し、その間の関係を明らかにすることはほとんどなく学習している。それらの上級科目として高周波（マイクロ波）回路や伝送回路などや、電磁波工学やアンテナ工学などの授業科目がある。これら上級科目は必ずしも開講されていない場合が最近では多くある。この結果、特定の研究室に所属して始めて学習するという現実がある。EMC（電磁両立性）の問題は、電気回路（高周波回路）と電磁気学（電磁波論）と融合領域の問題である。現在の電気電子機器やデジタル技術を応用する各種機器製品は、その性質上不要な電磁波（妨害波）を放出しており、通信に妨害や干渉を及ぼす恐れがある。この危惧に対処するためにEMC規格がある。電気電子機器の設計においては、電気機器の本来の仕様を満足しながら、この規制値を満足するという両立性が求められることになる。設計ガイドラインとは、電子機器の設計において基本となる配線を含む回路素子の働きや現象、妨害波発生メカニズムを理解し、設計に生かすことの指針を示すことである。

2020年度からは新型コロナウイルスによるパンデミックため対面による会合が開催されなかった。このため実験を伴う設計ガイドライン入門編は開催されずに研究会が終了した。これに伴い資料テキストを公開することになった。

このテキスト執筆と講義は上芳夫が主に担当し、実験においては中村隆（岐阜大学名誉教授/電通大客員教授）と萱野良樹が担当し、福澤恵司と上がサポートした。また、実験手引書は（故）橋本慶隆が担当した。

電気通信大学産学官連携センター ギガビット研究会事務局

本間高弘 知的財産部門長・教授

萱野良樹 情報・ネットワーク工学専攻 准教授

上 芳夫 特任教授・代表

堀 建二 客員教授

（故）橋本慶隆 客員教授（2021年8月20日逝去）

福澤恵司 客員教授

雨宮不二雄（2014年度から）客員教授

高坂直子 非常勤事務員

注：このテキストに関する問い合わせにお答えすることはできませんので、ご了承ください。

VNA を用いた中級編講座

最近では非常に多くの技術者が、ベクトルネットワークアナライザ(VNA)を使って、回路素子や伝送線路から構成される回路網の振る舞いを表現・評価することを行っています。VNA は通常の電圧や電流を測定するのではなく、ある条件下での回路網の特性・性質を直接測定する機器です。このため、電気系専攻の学部授業でもこれを取り上げることは稀です。この中級編は、VNA の測定値の意味、基本的な回路網での他の表現法との関係から始めて、EMC の分野では必ず出てくる伝送線路を中心に、その振る舞い、評価の考え方を学習します。

このセミナーでは、**受講者一人ひとりに準備された簡易型の VNA を用いて、各自で測定**を行い、測定した結果から知りたい特性などを求め、特に、EMC 現象を理解できるようにすることを目指している。なお、使用する VNA は帯域 500MHz の 2 ポート測定器であるが、4 ポートでの測定もできるように自作プログラムを準備している。

内容

1. まえがき	6
2. ベクトルネットワークアナライザを使う	8
2.1 ベクトルネットワークアナライザの構成	8
2.2 VNA の使用例	8
2.3 初期設定	9
2.4 VNA での測定値表示	10
2.5 VNA の測定結果から何が分かるか	13
3. 回路解析	14
3.1 網目解析法と節点解析法	14
3.1.1 Kirchhoff の電圧則から網目解析法へ	14
3.1.2 Kirchhoff の電流則から節点解析法へ	16
3.2 インピーダンス行列とアドミタンス行列	17
3.3 縦続行列、F行列、ABCD 行列	19
3.4 各行列間の変換	21
3.5 散乱(S)行列	22
3.6 S 行列と Z 行列および Y 行列との関係	24
実験1: 測定した S 行列から他の行列要素の関係をj用いて、素子の性質を知る	26
実験 2: キャパシタの ESR と ESL	30
4. 伝送線路	33
実験 3: 十分なレベルの信号を伝送する伝送線路の条件	33
4.1 平衡線路と不平衡線路	36
4.2 回路論的な意味	37
4.3 電磁界的な意味	38
実験 3.5: 伝送線路が作る電磁界(磁界プローブによる観測)	39
5. Heaviside の電信方程式の解表現	39
5.1 進行波理論	40
5.2 縦続行列表示	42
5.3 損失のある線路	42
実験 4: 終端開放および短絡時の伝送線路の入力インピーダンス	44
実験 5: 縦続行列の要素から特性インピーダンスと実効誘電率を求める	47
{6. クロストークの原理	49
6.1 電界結合と C(容量性)結合	50
6.2 磁界結合と M(誘導性)結合	52
実験 6: 電界結合と磁界結合の基本モデル実験	53

7. 多線条線路の解析.....	55
7.1 電信方程式	55
7.2 モード分解による解法.....	55
7.3 状態変数法	57
7.4 近端クロストークと遠端クロストーク	58
実験 7: 2本線路系のクロストーク特性	60
7.5 モード変換の評価	62
7.5.1 逆相電流と同相電流	63
7.5.2 ミックスドモード S 行列.....	63
実験 8: ミックスドモード S 行列の測定	64
附録と参考.....	69
附録 1 静電界で定義される電圧と KVL.....	69
附録 2 電荷保存則(電流連続の式)と KCL.....	69
附録 3 インピーダンス行列およびアドミッタンス行列と S 行列の関係	70
附録4 Heaviside の電信方程式を電磁界表現から求める.....	71
附録5 伝送線路の縦続行列.....	73
附録6 モード電圧・電流から実電圧・電流への変換	73
附録7 ミックスドモード S 行列への変換.....	75
参考1 回路網の入力インピーダンスと反射係数	77
参考 2 共役整合	78
参考3 インピーダンス(アドミッタンス)とスミスチャート	79

1. まえがき

抵抗、インダクタ、キャパシタなどの素子は受動素子と呼ばれ、トランジスタなどの増幅作用のある素子を能動素子という。回路網はさらに電源回路を加えて構成されている（図 1.1(a)）。この回路網において、図 1.1(b)に示すように必要な信号成分（回路的には電源回路で表現される）を必要な受信回路（回路的には負荷インピーダンス）に伝送するにはどのような構成にすればよいかを目指して設計がなされる。

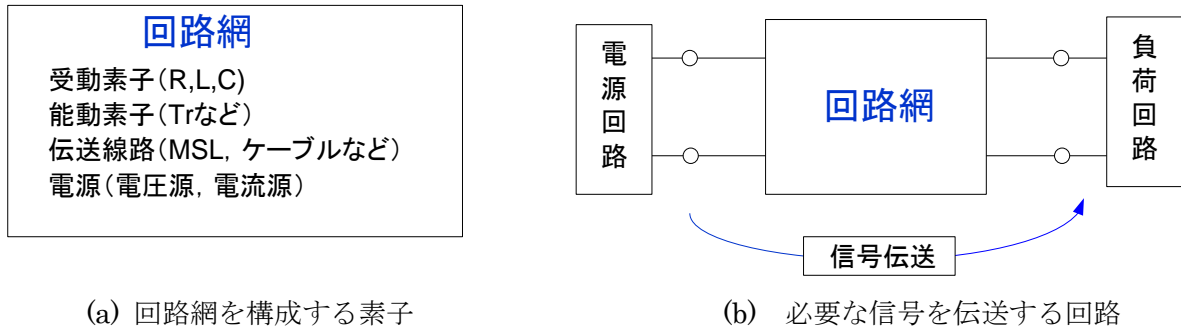


図 1.1 回路網の概念

電気回路では、図 1.1(b)に示す概念の回路網を解析するために、オームの法則やキルヒホッフの法則を基に回路解析理論が発展してきた。通常の回路網理論とは、回路網の 1 次側（入力側）ポートでの電圧や電流と 2 次側（出力側）ポートの電圧や電流との関係を求めるものである。このとき回路網の性質を表現する手法にインピーダンス行列、アドミッタンス行列、縦続行列などがある。一方、ベクトルネットワークアナライザ(VNA)は、ポートに出入りする成分は「平方すると電力」の次元の波（入射波と出射波）で定義され、シグナルフローグラフと呼ばれる表現法であり、ポート間の関係は行列形式で与えられる散乱行列（Scattering matrix）と呼ばれる。行列の各要素（Scattering parameter、S パラ）が測定される。同じ回路網を電圧や電流で取り扱うときと、VNA で取り扱うときの違いを概念として次に示す。

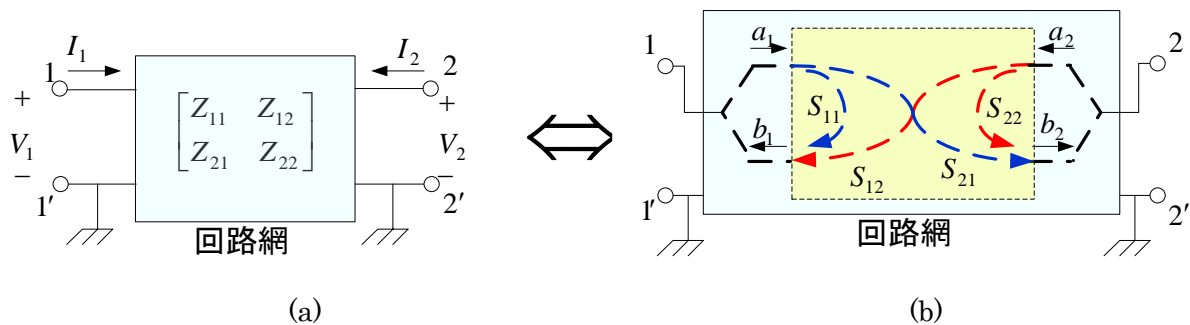


図 1.2 回路網の取扱法：

(a) インピーダンス行列での電圧電流の例、(b) シグナルフローグラフでの入射波 a_i と出射波 b_i

図 1.2(a)においては、回路網の入出力ポートの電圧電流の関係をインピーダンス行列で表現している例である。このとき、ポートの電圧は一般にはグラウンドを基準にして規定されるものである。これに対し、図 1.2(b)において、黄色で示した部分が回路網をシグナルフローグラフで表示したときの表現法であり、入射波(a_1 と a_2)と出射波(b_1 と b_2)はそれぞれ「同じポート端子」で測定される。すなわち出射波がグラウンド端子に対応するものではないことに注意することが重要である。

図 1.2 の表現を数式で表現すると、次図のようになる。

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \\
 & \quad \quad \quad \begin{matrix} \nwarrow & \nearrow \\ \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \end{matrix} \\
 & \quad \quad \quad \Leftrightarrow \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

(a) (b)

図 1.3 回路網の取扱法：(a)電圧電流で表現する他の行列表示と(b)散乱行列の表示

後述する基本的な T 型や II（パイ）型の素子構成の回路網では、行列の要素と回路素子の関係が簡潔に表現できるが、散乱行列では簡単ではない。

今、電源回路からの信号を負荷回路に全て供給させる回路網を設計する例を考える。この回路網を VNA で評価することを考える。図 1.2(b)の VNA で測定される S_{11} は反射係数を意味し、 S_{21} はポート 2 に出て行く成分となる。したがって回路網が無損失のとき、 $S_{11} = 0$ であれば、 $S_{21} = 1$ となるので、回路網に供給された信号が負荷回路に全て伝送されたことになる。この様になる回路網を設計することが回路設計である。

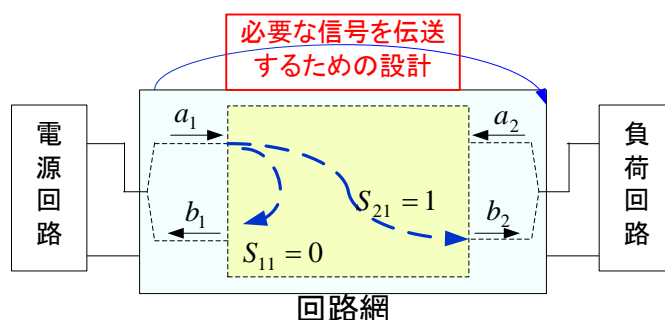


図 1.4 シグナルフローグラフで表現される散乱行列で見る回路網の設計

VNA では、回路設計において散乱行列の要素を評価すれば設計の良否は判断できることになるが、回路素子との関係を把握するには電圧、電流で表現する回路網行列で考える方が簡潔であり、物理的な意味の把握が容易である。

このセミナーにおいては、以上のことから VNA で測定される S パラメータと電圧と電流で表現する各種行列の関係をとり上げ、回路素子の評価などに展開する。さらに EMC の分野では必要不可欠な伝送線路について、線路定数の評価やクロストークなどの動作解明や現象説明に発展させる。

2. ベクトルネットワークアナライザを使う

2.1 ベクトルネットワークアナライザの構成

ベクトルネットワークアナライザ（VNA）の構成を簡潔に述べる。図 2.1 はここで使用する VNA に試料を接続したとき、何をしているかを模式的に示している。

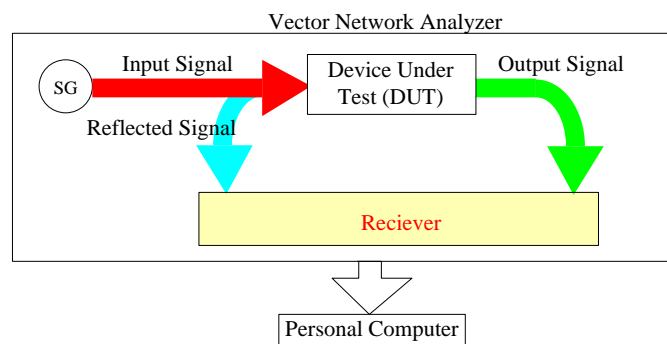


図 2.1 ネットワークアナライザの基本概念図（1ポートのみ）

この図においては、試料（DUT: device under test）が接続されている状態で、左側の信号発生器（SG）からの入力信号（Input Signal）を試料に加えたとき、反射する成分（Reflected Signal）と、試料を通過している成分（Output Signal）とを受信・測定していることを示している。さらに、信号源を右側に接続して同様の測定を行う。この状態が図 2.2 である。この図にあるように各ポートでは、入力信号に対応する成分は参照信号（Reference Signal）として取り出しており、これを基準として各成分を規格化している。

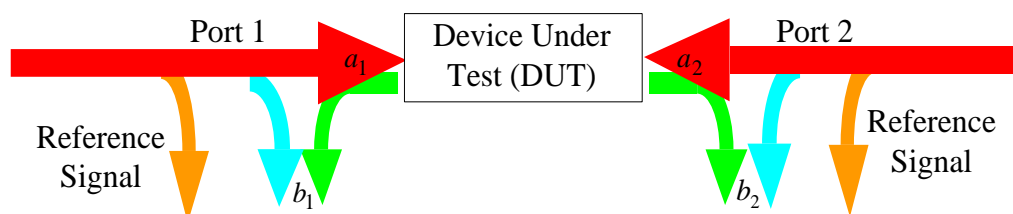


図 2.2 VNA の観測信号の模式図

図 2.2 に示された信号がどのようなものであるかは後述する。

2.2 VNA の使用例

VNA は、上記したように信号を送信する回路と受信する回路を備えた構成になっており、送信回路と受信回路間に被測定回路(DUT)を挿入することによってDUTの伝送特性を測定する計測器となっている。送信信号は、指定する帯域を掃引する（周波数を連続的に変化する）方式であるので、測定結果は周波数特性として観測される。このため、DUT が最適な特性をもつように調整するときにも非常に便利である。VNA で測定しているものは後述するように電気回路における電圧や電流とは異なり、電圧や電流が定義できない導波管を使用する回路においても適用ができる。さらにダイナミックレンジ（測定できる大きさの範囲）が非常に広いので、アンテナ特性や EMI 試験においても用いられている。

DUT が RLC などの受動素子のみで構成されているときは、出力（観測）信号は入力信号より小さくな

る。このような測定だけでなく、入力信号より出力信号が大きくなる増幅回路であっても測定が可能である（この場合は VNA の許容電力範囲に注意する必要がある）。

2.3 初期設定

VNA を使えるようにすることから始める。一般に VNA の測定ポート（端子）には延長用の同軸ケーブル（ポートケーブル）が接続されており、これらの同軸ケーブル間に被測定試料（DUT）を挿入して測定を行う。このために、この同軸ケーブル間を直結した位置に DUT を挿入すると正しく測定が行えるように、この箇所が測定しないときの初期の状態となっているように設定する必要がある。このために行う初期設定がキャリブレーション（Calibration：校正）である。ここでは図に示すように実験に使用する 2 ポート VNA (DST 社製 DZV-1) を対象にフルポートキャリブレーション (Full ports calibration) の概略の手続きを示す。

以下 VNA の画面とは、パーソナルコンピュータ（PC）の画面を意味する。

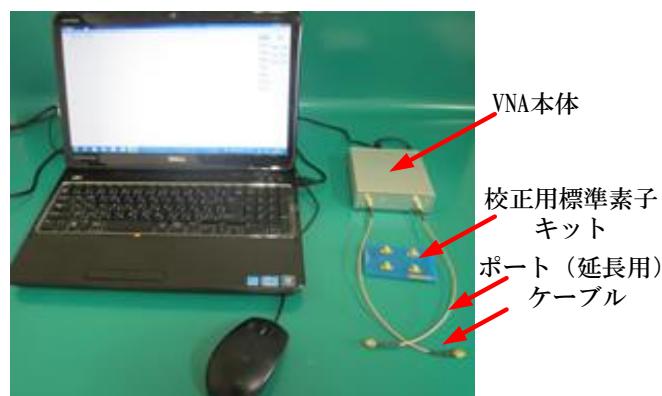


図 2.3 VNA の構成（パーソナルコンピュータと DZV-1）と校正用標準素子キット

以下の操作を、画面の指示に従って、PC 画面のソフトキーで行う。（詳細は校正手引書を参照）

1. 測定周波数範囲および測定点数を設定
2. ポート 1 に 50 Ω 、短絡(Short)および開放(Open)の標準器を接続して、校正を実施
3. つづいて、ポート 2 についても、同様の設定で校正を実施
4. ポート 1 とポート 2 を直結して、Through 校正を実施
5. ポート 2 に 50 Ω 標準器を接続して、ポート 1 の Isolation 校正を、つづいてポート 1 に 50 Ω 標準器を接続してポート 2 の Isolation 校正を実施

以上で校正が完了する。終了したらこのデータを保存（Save）しておく。

これが終わったら、試料を挿入して測定を始めることができる。また、異なる周波数帯域の校正を実施し、それらを保存しておくとき必要ときに呼び出して使用することが可能である。保存してある校正データを読み出して測定するときは、校正した時と同じポートケーブルを使用して測定する。他の VNA の校正データを使用すると正しい測定はできない。

2.4 VNA での測定値表示

次に、新たに準備したケーブルと標準器セットを用いて、つぎの測定を実施してみよう。VNA のポート 1 に DUT として新たな $50\text{-}\Omega$ 同軸ケーブル（両端に雄雌の SMA コネクタ付き）を接続し、そのケーブルの他端を標準器の“LOAD”に接続して、 S_{11} を測定する。

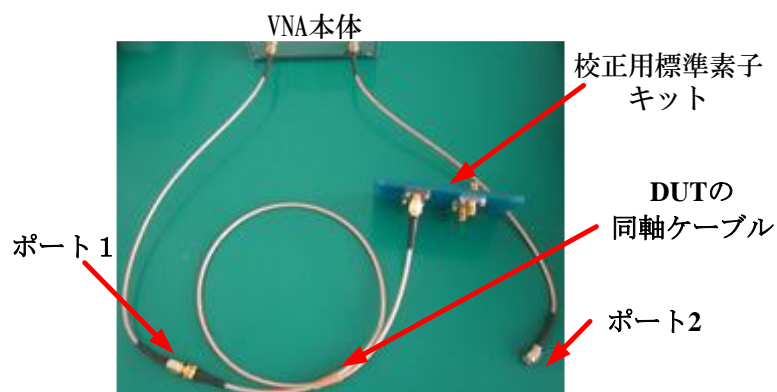


図 2.4 同軸ケーブルを DUT とするときの接続構成

注：VNA のソフトキーで、MEAS/**S11**/FORM/**LOGMAG**/RUN とクリックすると、 S_{11} を LOGMAG（大きさをデシベル(後述)で表現する意味)で画面に表示される。このとき位相(PHASE)も同時に測定されており、FORM/PHASE とクリックすると位相が表示される。FORM/POLAR とすると極座標表示となる。

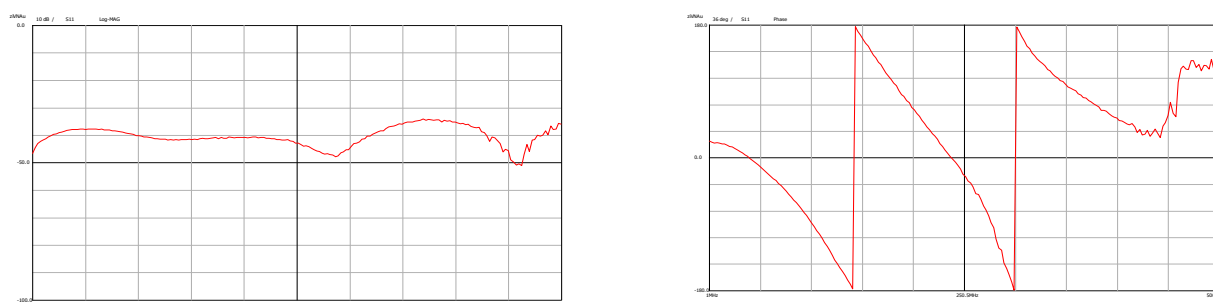


図 2.5 DUT の同軸ケーブルの終端を LOAD に接続したときの S_{11} 特性：
デシベルで表現される振幅特性（左図）と度数で表現される位相特性（右図）

DUT の同軸ケーブルの他端を標準器の“OPEN”に接続して、 S_{11} を測定すると、

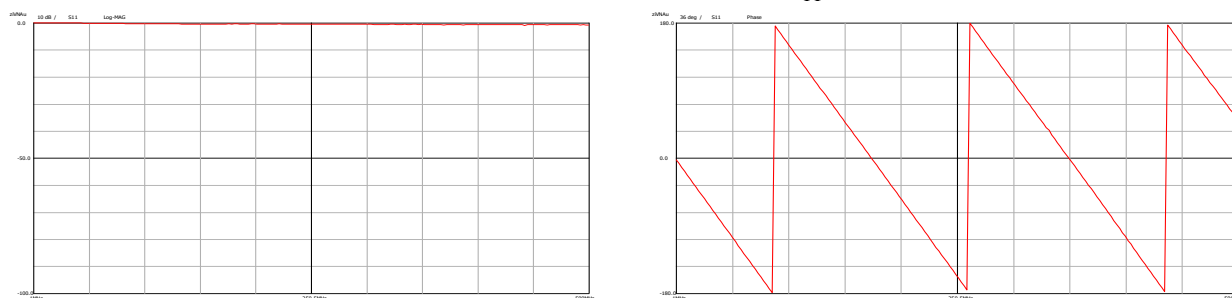


図 2.6 DUT の同軸ケーブルの終端を OPEN に接続したときの S_{11} 特性：
デシベルで表現される振幅特性(左図)と度数で表現される位相特性(右図)

DUT の同軸ケーブルの他端を標準器の“SHORT”に接続して、 S_{11} を測定すると、

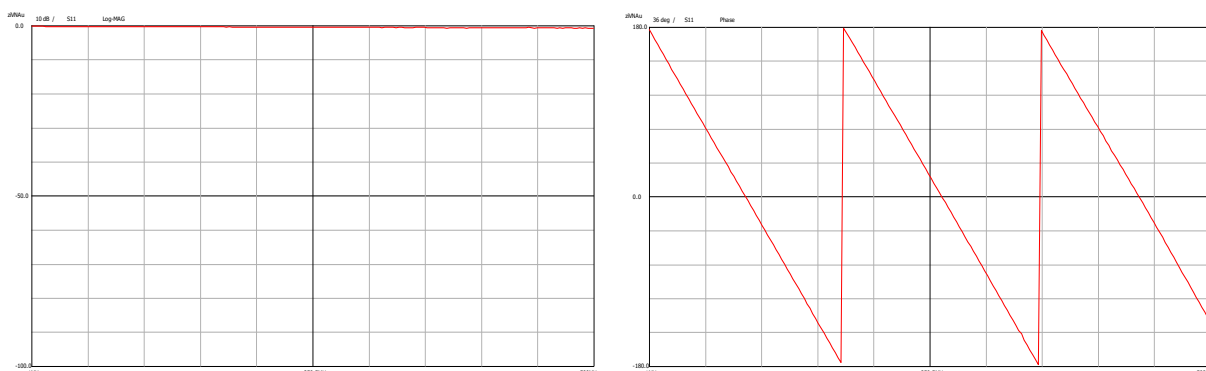


図 2.7 DUT の同軸ケーブルの終端を SHORT に接続したときの S_{11} 特性：
デシベルで表現される振幅特性（左図）と度数で表現される位相特性（右図）

DUT の同軸ケーブルの他端を、標準器の“THROUGH”を介してポート 2 のケーブルに接続して S_{21} を測定すると、

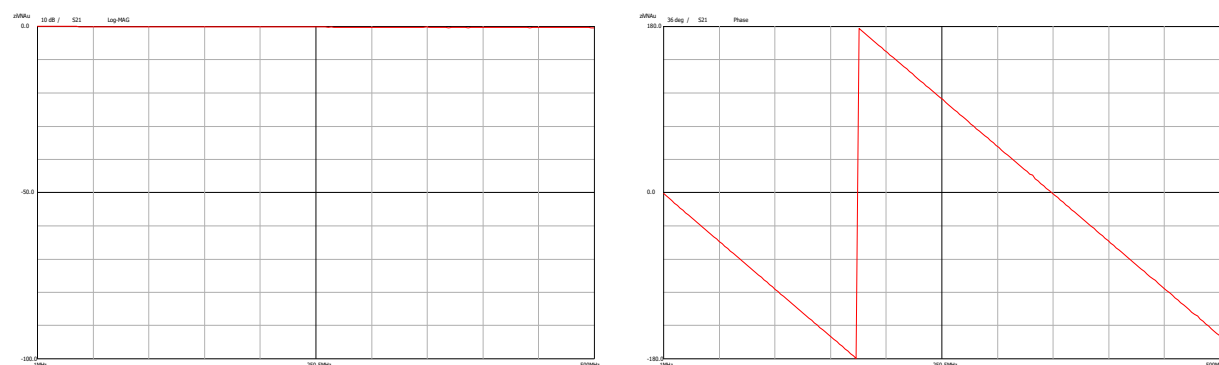


図 2.8 DUT の同軸ケーブルの S_{21} 特性：
デシベルで表現される振幅特性（左図）と度数で表現される位相特性（右図）

S_{11} 特性は、後述するように反射特性を、 S_{21} 特性は透過特性を意味している。図 2.5 に示した S_{11} 特性は、DUT の同軸ケーブルの終端に標準器の $50\text{-}\Omega$ を接続している。これは、この $50\text{-}\Omega$ と比較したときの反射を測定していることである。反射係数の大きさが $|S_{11}| = -40\text{ dB}$ ということは、真数では $1/100$ であり、1%が反射していることを意味する。

図 2.6 と図 2.7 に示した DUT の同軸ケーブルの終端を開放（OPEN）にしたときと、短絡（SHORT）にしたときは、振幅特性は同じであるが、位相特性に 180° の違いがある。このことは位相が重要な意味を持つことであり、振幅特性が同じであっても位相特性が同じでなければ同じ特性、同じ性質と言えないことを示している。反射係数の大きさが 0 dB （真数では 1 ）という意味は完全に反射することであり、全反射の状態を意味している。

図 2.8 の透過特性が 0 dB ということは、使用した同軸ケーブルはこの周波数帯域では殆ど減衰しないで信号が伝送されることを意味している。

図 2.5 から図 2.8 の測定結果において、位相特性は周波数が高くなるとともに右肩下がりの性質がある。

（この性質は後述する。）また位相変化は -180° から $+180^\circ$ 迄の範囲で表示している。例えば、「 $0^\circ \Rightarrow -90^\circ$ 」

⇒−180°⇒−270°」の変化は、「0°⇒−90°⇒−180°⇒+180°⇒+90°」のように、±180°内の範囲を外れると折り返されて不連続な表現となっている。

(注：これをラッピング(wrapping)されているという。連続的に表現した状態をアンラッピング(un-wrapping)という。この問題を明確にする例は後述する。)

また、数値データを取り込み、その一部を示すと、つぎのようなものである。

S11		S11		S12		S12	
Freq(Hz)	Mag(dB)	Freq(Hz)	Phase(deg)	Freq(Hz)	Mag(dB)	Freq(Hz)	Phase(deg)
1000000	−10.6143	1000000	−179.9743	1000000	−19.9541	1000000	0.4419934
3495000	−10.6115	3495000	179.63159	3495000	−19.9469	3495000	1.1111325
5990000	−10.6155	5990000	179.24348	5990000	−19.9399	5990000	1.8036222
8485000	−10.6154	8485000	178.82768	8485000	−19.9314	8485000	2.3592898
10980000	−10.6103	10980000	178.44694	10980000	−19.9076	10980000	2.9006615
13475000	−10.6201	13475000	178.04256	13475000	−19.9024	13475000	3.5266412

以上のデータ s_{11} から s_{22} までは、大きさと偏角（位相角）で表現され、直角座標系で取り込んだデータでは、deci-Bell(dB：デシベル)表示の大きさと位相角が周波数によって変化している値として表現されている。

注：PCに取り込んだデータを再加工してグラフ表示したり、計算プログラム用に使用するための取り扱い「VNA 校正法の手引き」を参照のこと。

注：デシベル表示とは、基準電力 P_i と観測電力 P_o を比較するとき、この電力比 P_o / P_i の常用対数を取り、10 倍する値 $(P_o / P_i)_{\text{in dB}} = 10 \log_{10} (P_o / P_i)$ である。これを電圧や電流に適用するときは、電力が電圧や電流の平方に比例することから、例えば電圧の場合は $(V_o / V_i)_{\text{in dB}} = 20 \log_{10} (V_o / V_i)$ となる。電気系においては、常用対数表示は $\log_{10} x = \log x$ で、自然対数表示は $\log_e x = \ln x$ と表示する。重要な対数の性質（公式）として、 $\log x^2 = 2 \log x$ 、 $\log xy = \log x + \log y$ はよく知られているが、電気系で使用する対数の効用は、非常に広い範囲の数値を非常に狭い範囲の数値で表現することであり、例えば、 $100000(=10^5)$ と $0.00001(=10^{-5})$ の範囲は対数を使用すると、 $\log 10^5 = 5 \log 10 = 5$ から $\log 10^{-5} = -5 \log 10 = -5$ の範囲になることである。

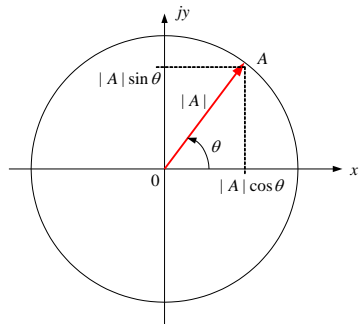
電気系でよく使用される数値として

真数 (x)	1	10	2
対数值 ($\log x$)	0	1	≈ 0.3
20log x (dB)	0	20	6

などがあり、電圧が半分になることを 6 dB 小さくなったといい、電力が 2 倍になることは 3 dB 増加し

たという。前述の -40 dB という数値は、 $10^{-2}=0.01=1/100$ になるということである。

デシベル表記された大きさと位相角を極座標表示で表現することは、複素数として表現することである。使用する VNA は直接複素数の数値を取り出すことはできない。デシベル表記された大きさと位相角から複素量を求めるには、



デシベル(dB)の定義

$$20 \log |A| = S \quad \Rightarrow \quad |A| = 10^{(S/20)}$$

Euler の関係式

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

の関係を使用すると、

$$S_{11} = 10^{\{S_{11}/20\}} e^{j\theta_{11}} = 10^{\{S_{11}/20\}} \{\cos \theta_{11} + j \sin \theta_{11}\} \quad (2.1)$$

$$S_{21} = 10^{\{S_{21}/20\}} e^{j\theta_{21}} = 10^{\{S_{21}/20\}} \{\cos \theta_{21} + j \sin \theta_{21}\} \quad (2.2)$$

$$S_{12} = 10^{\{S_{12}/20\}} e^{j\theta_{12}} = 10^{\{S_{12}/20\}} \{\cos \theta_{12} + j \sin \theta_{12}\} \quad (2.3)$$

$$S_{22} = 10^{\{S_{22}/20\}} e^{j\theta_{22}} = 10^{\{S_{22}/20\}} \{\cos \theta_{22} + j \sin \theta_{22}\} \quad (2.4)$$

である。これらは次のようにまとめて行列(matrix)として表現される：

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

これが**散乱行列**(Scattering matrix)、**S マトリックス**、**S 行列**と呼ばれるものである（日本においては S パラとも称している）。この行列の要素は上記のように複素数ではあるが、交流回路で使用するフェーザ法（複素）表示の電圧や電流とは後述するように趣を異にするものである。そのため同じ回路網を電圧や電流で表現するものと性質が異なる。

2.5 VNA の測定結果から何が分かるか

上記のように、VNA で回路網を測定した数値データは、散乱行列と呼ばれるものであり、

- (1) 通常の電圧や電流での表現ではなく、
- (2) 行列形式の複素数データで

反射波や透過波を表現していることである。一方、回路網の性質や特性を表現するために、電圧や電流で表現する交流回路の表示法では、インピーダンス (Z) 行列、アドミッタンス (Y) 行列、縦続行列^注などの表現が用いられており、基本的な回路網では回路素子とも明白に関係付けられる。交流回路における電圧や電流は、基本的に正弦関数や余弦関数で表現できる波動であるが、一般にはその認識が少ない。

注：日本においては F 行列と呼ばれることが多いが、諸外国では ABCD 行列と呼ばれることが多い。こ

ここでは行列の性質を意味する縦続行列を使用する。

このセミナーでは、電気回路で使用する交流での電圧や電流で回路網を表現する手法から始めて、何が違い、また相互の関係はどのように表現できるのか、を述べる。さらに、高周波回路や EMC の分野で重要な伝送線路の特性や動作を VNA で測定した結果から解析・考察して動作メカニズムなどを理解していくプログラムになっている。

3. 回路解析

電気回路学の回路解析においては電圧と電流を知るための解析手法を取り扱っている。まず、回路網での電圧あるいは電流を求める解析手法を述べ、そのために用いられる回路網の動作を表記するための行列手法、各種行列間の相互関係を述べる。

注：ここでは、行列の取り扱いにチャレンジするために式の展開を詳細に示す。

3.1 網目解析法と節点解析法

回路網を解析するときの手法としては、網目解析（Mesh Analysis）と節点解析（Node Analysis）がある。前者は電流を、後者は電圧を未知数とする解析手法である。まず、これに関して述べる。ここで述べる「網目」とは、一般の閉路解析とかループ解析と呼称される場合と異なり、「対象とする閉回路（閉路）の内部には他の閉回路を含まない」ことである。

3.1.1 Kirchhoff の電圧則から網目解析法へ

Kirchhoff の電圧則 (KVL) は、この静電界の周回積分則に対応する（附録 1 参照）。即ち、「複数の枝からなる一回りする回路（閉回路）があるとき、各枝（節点間をつなぐ回路素子の端子間）電圧の代数和は零である」とする法則が KVL である。

$$\sum_{i=1}^n V_i = 0 \quad (3.1)$$

簡単な例として次の直流回路を考える。この回路は T 型回路の入出力端に橋でショートカットした素子が存在するという意味で「橋絡 T 型回路」と呼ばれている。

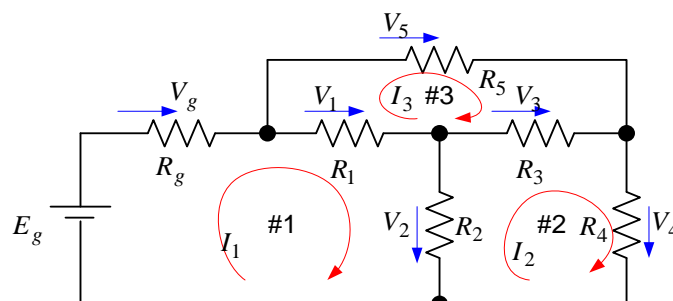
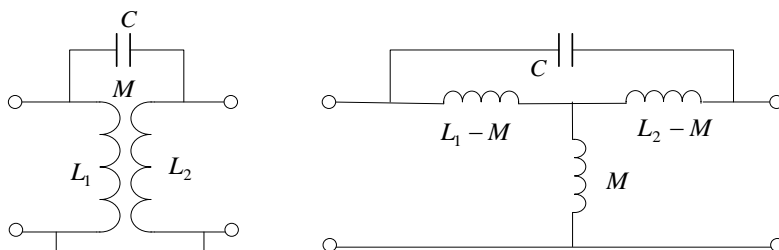


図 3.1 網目方程式を説明する簡単な橋絡 T 型回路

参考：図 3.1 の回路は、例えば相互誘導回路やトランス回路などで入出力端子間の浮遊キャパシタンスを



と表現したときなどに出現する素子構成の形式である。図 3.1 では、簡単のためにリアクタンス素子を全て抵抗素子で表現している。

図 3.1 の回路において、「網の目」を形成する閉路(ループ)は赤いループ(#1～#3)で示したものである。ここでループに付けた矢印の方向に電流が流れているとする。さらに、各素子の電圧(端子電圧)が図の青の矢印方向に電流が流れたときに正となる値であるとする。この設定は任意であり、**負の電圧や電流で求まった場合は実際には逆向き**であることを意味する。このとき、閉路#1 での KVL は次となる：

$$\begin{aligned} -E_g + V_g + V_1 + V_2 = 0 &\Rightarrow -E_g + R_g I_1 + R_1(I_1 - I_3) + R_2(I_1 - I_2) = 0 \\ (R_g + R_1 + R_2)I_1 - R_2 I_2 - R_1 I_3 &= E_g \end{aligned} \quad (3.2)$$

注：電流は電位の高い方から低い方に流れると規定されているので、電源電圧の E_g は他の素子の電圧とは逆になっているので負である。

閉路#2 での KVL は、

$$\begin{aligned} -V_2 + V_3 + V_4 = 0 &\Rightarrow -R_2(I_1 - I_2) + R_3(I_2 - I_3) + R_4 I_2 = 0 \\ -R_2 I_1 + (R_2 + R_3 + R_4)I_2 - R_3 I_3 &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

閉路#3 での KVL は、

$$\begin{aligned} -V_1 + V_5 - V_3 = 0 &\Rightarrow -R_1(I_1 - I_3) + R_5 I_3 + R_3(I_3 - I_2) = 0 \\ -R_1 I_1 - R_3 I_2 + (R_1 + R_3 + R_5)I_3 &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

となる。これらを整理して行列形式で表現すると

$$\begin{bmatrix} R_g + R_1 + R_2 & -R_2 & -R_1 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + R_4 & -R_3 \\ -R_1 & -R_3 & R_1 + R_3 + R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

となる。

注：この主対角要素はそれぞれの閉路(網目)を構成する全ての抵抗の和、非対角要素は他の閉路にも含まれる抵抗であり、考察する主対角要素を流れる電流と、他の閉路にも含まれる抵抗の電流の向きが逆であれば、その電流に対応する列は、その抵抗にマイナス符号を付して要素とする。

これが行列表示した網目方程式(Mesh equation)である。網目方程式では未知数が網目の電流であり、上式では

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_g + R_1 + R_2 & -R_2 & -R_1 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + R_4 & -R_3 \\ -R_1 & -R_3 & R_1 + R_3 + R_5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} E_g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

と逆行列を計算することによって求められる。これが網目解析法である。

注：3行3列の行列はクラメル方法で手計算可能であるが、最近の計算ソフトでは行列計算が簡単に行えるので、行列表示で求める方が得策である。

3.1.2 Kirchhoff の電流則から節点解析法へ

次に、Kirchhoff の電流則(KCL)をベースにする節点方程式を考える。KCLは電磁気学では電荷保存則（電流連続の式）に対応している（付録2参照）。

前例と同じ橋絡T形回路を取り上げ、次図に示すような3個の節点（①～③）での電圧（節点電圧）を V_1, V_2, V_3 とする。

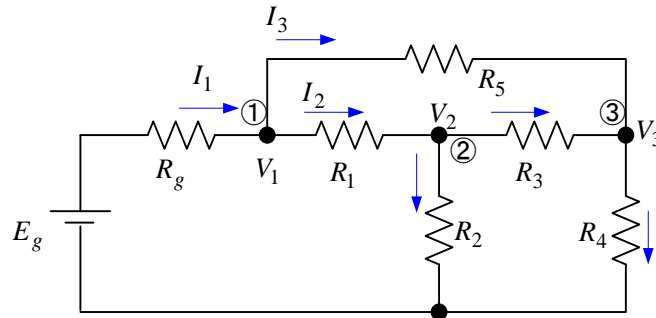


図 3.2 網目方程式の例を示す回路

図中の任意の抵抗 R_i をコンダクタンス $G_i = 1/R_i$ で表現すると、節点①に出入りしている電流 I_1, I_2, I_3 は

$$V_1 = E_g - R_g I_1 \Rightarrow I_1 = G_g E_g - G_g V_1, \quad I_2 = G_1(V_1 - V_2), \quad I_3 = G_5(V_1 - V_3) \quad (3.7)$$

となるので、KCL から $I_1 - I_2 - I_3 = 0$ であるので、

$$(G_g + G_1 + G_5)V_1 - G_1V_2 - G_5V_3 = G_g E_g \quad (3.8)$$

とまとめることができる。同様にして他の節点においても

$$-G_1V_1 + (G_1 + G_2 + G_3)V_2 - G_3V_3 = 0, \quad -G_5V_1 - G_3V_2 + (G_3 + G_4 + G_5)V_3 = 0 \quad (2.9)$$

となる。これらを行列形式でまとめて表現すれば、

$$\begin{bmatrix} G_g + G_1 + G_5 & -G_1 & -G_5 \\ -G_1 & G_1 + G_2 + G_3 & -G_3 \\ -G_5 & -G_3 & G_3 + G_4 + G_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_g E_g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

これが節点方程式であり、節点電圧は

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_g + G_1 + G_5 & -G_1 & -G_5 \\ -G_1 & G_1 + G_2 + G_3 & -G_3 \\ -G_5 & -G_3 & G_3 + G_4 + G_5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} G_g E_g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

と求められる。この手法が節点解析法である。

注：(3.10)式において、主対角要素は節点に接続される全てのコンダクタンスの和であり、非対角要素は主対角要素のコンダクタンスの他端子側が節点電圧に対応するとき、負の符号を付けたコンダクタンスになる。

以上に述べた回路では、抵抗回路網で表現したが、抵抗をインピーダンスに、コンダクタンスをアドミッタンスに変換すれば、交流回路においても成立する。

3.2 インピーダンス行列とアドミッタンス行列

ここでは基本的な T 形回路（次図の破線内の回路）を取り上げ、前記の回路解析手法を用いて回路網の入出力ポート間の関係を表示する手法を述べる。

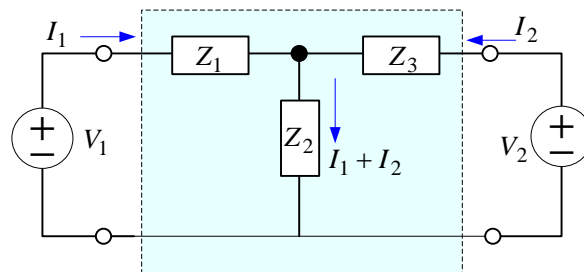


図 3.3 T 形回路

今、入力側（入力ポート）（1 次側）および出力側（出力ポート）（2 次側）に理想電圧源を接続し、両端子での電流を図に示すように回路網に入り込む方向を正の向きとする。これに KVL を適用し、電流の向きに注意して、左側の閉路（網目）と右側の閉路で、一回りする枝電圧の和は零であるので、

$$\begin{aligned} -V_1 + Z_1 I_1 + Z_2 (I_1 + I_2) &= 0, & -V_2 + Z_3 I_2 + Z_2 (I_1 + I_2) &= 0 \\ \Rightarrow (Z_1 + Z_2) I_1 + Z_2 I_2 &= V_1, & (Z_2 + Z_3) I_2 + Z_2 I_1 &= V_2 \end{aligned}$$

これらをまとめて行列で表現する網目方程式による回路方程式が

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_2 \\ Z_2 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_2 \\ Z_2 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

となり、「入出力の電圧」を「入出力の電流」で表現しており、この間の関係式はインピーダンスの次元をもつので、この行列 \mathbf{Z} はインピーダンス行列と呼ばれるものになる。受動回路網においては相反定理から $Z_{21} = Z_{12}$ が成立する。

注：相反定理とは、たとえば、図 3.3 において電源($V_1 = E_g$)を 1 次側だけにし、2 次側に負荷 Z_L を接続

したときの 2 次側電圧と 1 次側電流は、電源($V_2 = E_g$)を 2 次側だけにして 1 次側に負荷 Z_L を接続した

ときの1次側電圧と2次側電流に等しいことである。これは、受動回路においては入出力端を入れ替えても同じ特性を持つことを意味する。

次の例は、 Π 型回路である。素子をアドミタンスで、電源を理想電流源で表現しておく。

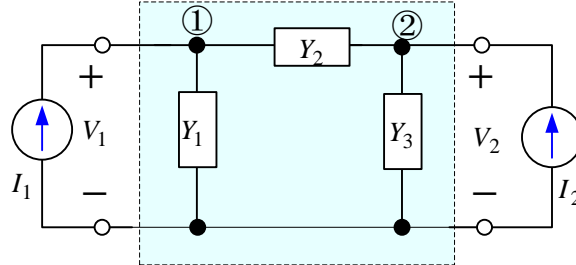


図 3.4 Π 型回路

これに KCL を適用する。節点①と②に流入する電流の代数和は零であるので、流入する電流を正、流出する電流を負にとると

$$\begin{aligned} I_1 - Y_1 V_1 - Y_2 (V_1 - V_2) &= 0, & I_2 - Y_3 V_2 - Y_2 (V_2 - V_1) &= 0 \\ \Rightarrow I_1 &= (Y_1 + Y_2) V_1 - Y_2 V_2, & I_2 &= (Y_3 + Y_2) V_2 - Y_2 V_1 \end{aligned}$$

これを整理した行列形式の節点方程式が

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 & -Y_2 \\ -Y_2 & Y_2 + Y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 & -Y_2 \\ -Y_2 & Y_2 + Y_3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

となる。「入出力の電流」を「入出力の電圧」で表現することになるので、この間の係数行列式はアドミッタンス行列 \mathbf{Y} で表現されることになる。受動回路網においては相反定理から $Y_{21} = Y_{12}$ が成立する。また、前述したように $Y_{21} = Y_{12} = -Y_2$ と素子値に負号の付くことが特徴である。

任意の回路網のインピーダンス行列とアドミッタンス行列の関係は、

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

と表現でき、両者の電圧と電流は同一である。したがって、この両式はインピーダンスおよびアドミッタンス行列の関係は「逆行列の関係」にあることに気づく。すなわち

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}} \begin{bmatrix} Y_{22} & -Y_{12} \\ -Y_{21} & Y_{11} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \mathbf{Y}^{-1} \quad (3.15a)$$

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}} \begin{bmatrix} Z_{22} & -Z_{12} \\ -Z_{21} & Z_{11} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1} \quad (3.15b)$$

が成立する。

インピーダンス行列やアドミッタンス行列の要素の物理的な意味を考える。(3.14)式からインピーダンス

行列の要素は、出力ポートを開放にして、

$$Z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} \quad Z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} \quad (3.16)$$

と求められる。この結果これらを「出力ポート開放（時の）入力インピーダンス」および「出力ポート開放（時の）伝達インピーダンス」と呼ぶ。入力ポートを開放にすると、

$$Z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0} \quad Z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0} \quad (3.17)$$

であるので、これらを「入力ポート開放（時の）伝達インピーダンス」および「入力ポート開放（時の）出力インピーダンス」と呼ぶ。

アドミッタンス行列の要素は、出力ポートを短絡にして、

$$Y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0} \quad Y_{21} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0} \quad (3.18)$$

と求められる。この結果これらを「出力ポート短絡（時の）入力アドミッタンス」および「出力ポート短絡（時の）伝達アドミッタンス」と呼ぶ。入力ポートを短絡にすると、

$$Y_{12} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0} \quad Y_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0} \quad (3.19)$$

であるので、これらを「入力ポート短絡（時の）伝達アドミッタンス」および「入力ポート短絡（時の）出力アドミッタンス」と呼ぶ。

以上のように、インピーダンス行列やアドミッタンス行列の要素は、単なる入力／出力／伝達インピーダンスやアドミッタンスでない。

3.3 縦続行列、F行列、ABCD 行列

回路網を表現する方法として、インピーダンス行列やアドミッタンス行列は、入出力ポート端子の電圧と電流との関係を表現するのに対し、この縦続行列は入力ポートの電圧、電流と出力ポートの電圧、電流との関係で表現するものである。日本においては **Fundamental** な行列という意味から F 行列と呼ばれたりしているが、欧米では **ABCD** 行列と呼ばれることが多い。ここでは縦続行列と称する。その意味は次に述べる性質から理解できる。

次の簡単な例を考える。ここで重要なことは、電流は「**入力ポートに入り込んで、出力ポートから出て行く方向が正の向き**」である。この定義はインピーダンス行列やアドミッタンス行列と異なる。

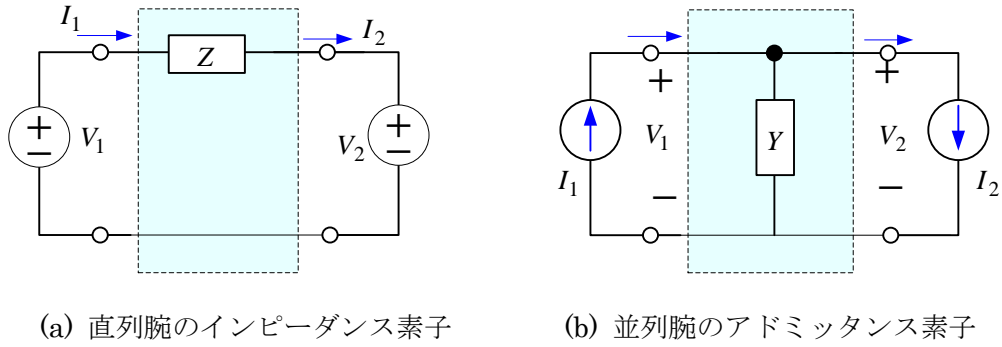


図 3.5 縦続行列を求める基本的な単一素子

図 3.5(a)の回路は、直列腕(series arm)にインピーダンス素子が存在する基本回路である。この回路では

$$I_1 = I_2 \quad \text{および} \quad V_1 - V_2 = ZI_1 = ZI_2$$

が成立するので、回路方程式は行列形式で

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

となる。(注：この回路には後述の(3.27)式から分かるようにインピーダンス行列は存在しない！)

図 3.5 (b)の回路は、並列腕(parallel (shunt) arm)にアドミッタンス素子が存在する基本回路であり、このときは、

$$V_1 = V_2 \quad \text{および} \quad I_1 - I_2 = YV_1 = YV_2$$

である。この回路方程式は行列形式で

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

となる。(注：この回路では後述の(3.28)式から分かるようにアドミッタンス行列は存在しない！)

次の回路はT型とΠ型の回路である。この縦続行列を上記の基本回路の縦続行列を用いて求めると、

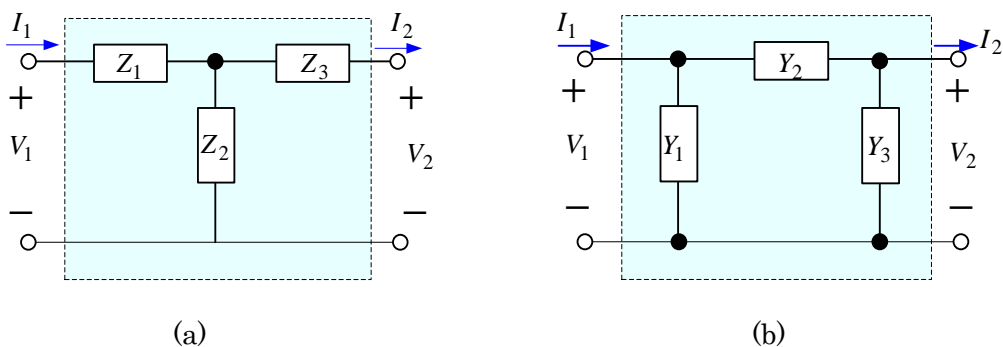


図 3.6 T型(a)とΠ型(b)の回路

T型の回路では、直列腕の素子、並列腕の素子、直列腕の素子の順に縦続接続されている。最初の素子の出力ポートの電圧と電流は 2 番目の素子の入力ポートの電圧と電流になっている。これが順番に繰り返されているので、全体の回路方程式は個々の縦続行列の積となり、次のようになる：

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & Z_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/Z_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Z_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+Z_1/Z_2 & Z_1 \\ 1/Z_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Z_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1+Z_1/Z_2 & Z_3(1+Z_1/Z_2)+Z_1 \\ 1/Z_2 & Z_3/Z_2+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.22}$$

II型の回路についても同様に、

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/Y_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/Y_2 \\ Y_1 & Y_1/Y_2+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1+Y_3/Y_2 & 1/Y_2 \\ Y_1+Y_3(Y_1/Y_2+1) & Y_1/Y_2+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

となる。

縦続行列は一般に各要素を A, B, C, D として

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

と表記されるので、ABCD 行列と呼ばれている。この行列には受動回路素子のときには 4 個の行列要素は全てが独立ではなく、相反定理から

$$AD - BC = 1 \tag{3.25}$$

の重要な関係式が存在している。

3.4 各行列間の変換

インピーダンス行列 \mathbf{Z} およびアドミッタンス行列 \mathbf{Y} と縦続行列の関係は、縦続行列の出力電流の向きを \mathbf{Z} および \mathbf{Y} での電流の向きに合わすようにとると、次のように書ける。

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B \\ C & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \Rightarrow V_2 = 1/C(I_1) + D/C(-I_2) \quad \text{または} \quad -I_2 = -V_1/B + A/B(V_2) \tag{3.26}$$

これらから、入出力ポートの電圧と電流の関係式として表現すると

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{C} \begin{bmatrix} A & AD-BC \\ 1 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ -I_2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ -I_2 \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

逆表示は

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{B} \begin{bmatrix} D & -(AD-BC) \\ -1 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

となり、縦続行列とインピーダンス行列およびアドミッタンス行列との変換公式が導出できる。

縦続行列の要素をインピーダンス行列の要素で表現するには、電流の向きに注意して

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Z_{11} & -Z_{12} \\ Z_{21} & -Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ -I_2 \end{bmatrix} \Rightarrow I_1 = Z_{21}^{-1} \{V_2 + Z_{22}(-I_2)\} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11}Z_{21}^{-1} & Z_{11}Z_{21}^{-1}Z_{22} - Z_{12} \\ Z_{21}^{-1} & Z_{21}^{-1}Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.29)$$

アドミッタンス行列の要素で表現するには

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ -Y_{21} & -Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \Rightarrow V_1 = -Y_{21}^{-1} \{Y_{22}V_2 + (-I_2)\}$$

したがって、

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Y_{21}^{-1}Y_{22} & -Y_{21}^{-1} \\ Y_{12} - Y_{11}Y_{21}^{-1}Y_{22} & -Y_{11}Y_{21}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

となる。

3.5 散乱(S)行列

前述した VNA で観測される反射波や透過波がどのように評価されて散乱(S)行列として評価されるかを説明するシグナルフローグラフが図 3.7 である。この関係式においては、『平方すると電力になるパラメータ』を規定し、このパラメータに関するポート間での関係を S 行列として表現する。

注：電流・電圧は波動として動作していることを念頭におくことが重要である。

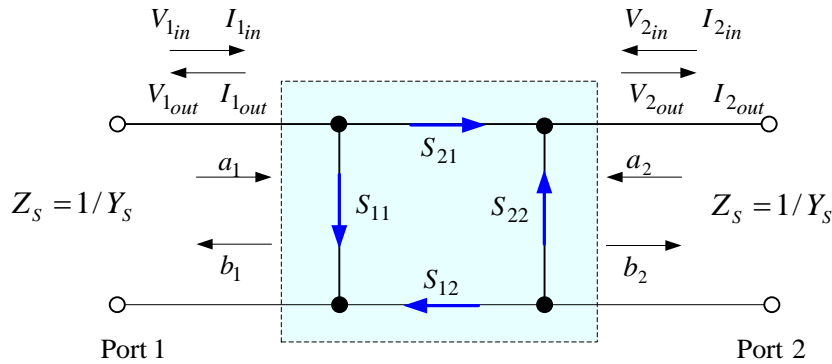


図 3.7 散乱(S)行列を示すシグナルフローグラフ

今、ポート 1 に流れ込んでくる電圧(波)および電流(波)を V_{1in} 、 I_{1in} とし、出て行く波を V_{1out} 、 I_{1out} とする。ポート 2 においても同様とする。このとき、ポートに接続されている測定系のインピーダンス(基準イン

ピーダンス)を $Z_s = 1/Y_s$ として次のように定義するパラメータを考える。(注：一般の VNA では基準インピーダンスは $Z_s = 50 \Omega$ であり、 Z_0 と表現している場合が多いが、後述する伝送線路の特性インピーダンスに Z_0 を使用するので、混同を避けるためにこのように表記する。)

$$a_n \equiv \frac{V_{n_{in}}}{\sqrt{Z_S}} = I_{n_{in}} \sqrt{Z_S} = \frac{1}{2\sqrt{Z_S}} \{V_{n_{in}} + I_{n_{in}} Z_S\} \quad (3.31)$$

$$b_n \equiv \frac{V_{n_{out}}}{\sqrt{Z_S}} = -I_{n_{out}} \sqrt{Z_S} = \frac{1}{2\sqrt{Z_S}} \{V_{n_{out}} - I_{n_{out}} Z_S\} \quad (3.32)$$

ここでは、これらをそれぞれ入射波および出射波と呼ぶことにする。これらの平方は電力を表している。

注：上式において右辺第1式と第2式は平方すると電力になることは理解できる。右辺第3式は、右辺第1式と第2式が同じであることを利用している。(3.31)式最右辺式を取り上げて、これを平方すると、

$$(3.31) \text{式最右辺} = \frac{1}{4Z_S} \{(V_{n_{in}})^2 + 2V_{n_{in}} I_{n_{in}} Z_S + (I_{n_{in}} Z_S)^2\}$$

これに、(3.31)式の右辺第1式と第2式の関係代入すれば、

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4Z_S} \{(V_{n_{in}})^2 + 2(V_{n_{in}})^2 + (V_{n_{in}})^2\} = \left(\frac{V_{n_{in}}}{\sqrt{Z_S}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4Z_S} \{(I_{n_{in}} Z_S)^2 + 2(I_{n_{in}} Z_S)^2 + (I_{n_{in}} Z_S)^2\} = (I_{n_{in}} \sqrt{Z_S})^2 \end{aligned}$$

となり、平方すると電力を意味する。

.....

この出射波と入射波の関係を次の行列で表すと、係数行列がS行列（散乱行列、Scattering matrix）である。

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

この結果、S行列の各要素は次のように定義されていることになる。

$$S_{11} = \left. \frac{b_1}{a_1} \right|_{a_2=0} \quad S_{12} = \left. \frac{b_1}{a_2} \right|_{a_1=0} \quad (3.34)$$

$$S_{21} = \left. \frac{b_2}{a_1} \right|_{a_2=0} \quad S_{22} = \left. \frac{b_2}{a_2} \right|_{a_1=0} \quad (3.35)$$

このことから、 S_{11} は $a_2 = 0$ の条件下で定義されていることは、ポート2への入射波がないこと、すなわちポート2が整合負荷 Z_S で接続されていることを示しており、この時 b_1 はポート1への入射波に対する反射波となるので、ポート1での反射係数となる。 S_{21} については、ポート2への入射波がないことから、それに起因する反射波がないので、ポート1からポート2への伝送（透過）だけを取り上げているので、このポート間の透過係数である。

無損失で遮へい形(電磁界が閉じ込まれた形)の伝送線路系であれば、ポート1に単位電力1を供給したとき、ポート1から反射する電力 $|S_{11}|^2$ とポート2へ伝送される電力 $|S_{21}|^2$ との関係が

$$|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 = 1 \quad (3.36)$$

となる。開放形(外に漏れ出している)電磁界の伝送線路系であれば、放射電力を含んだ損失電力係数

$$|S_{\text{loss}}|^2 \text{ が}$$

$$|S_{\text{loss}}|^2 = 1 - \{|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2\} \quad (3.37)$$

として評価できることになる。

3.6 S 行列と Z 行列および Y 行列との関係

さて、VNA を使用する際に、校正(Calibration)と称する一連の初期化作業を行うことを述べた。この作業の冒頭で、測定器の基準インピーダンス（一般には 50Ω の純抵抗＝基準抵抗）を接続して行う作業がある。この作業を回路論的にみると、これは電源回路の基準となる電力を規定することである。この状況は、次図の(a)である。

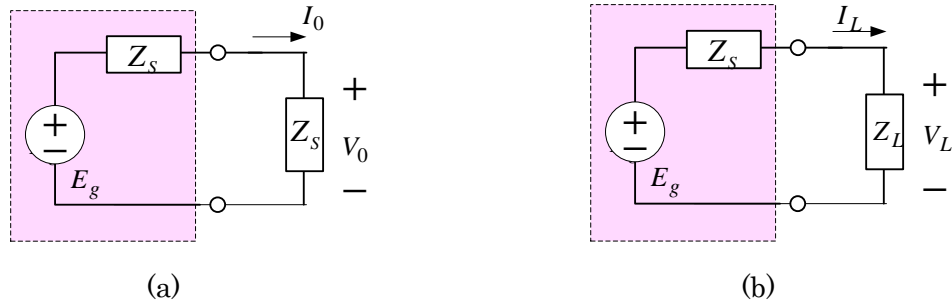


図 3.8 VNA の基準電力を規定する回路(a)と一般負荷回路(b)

この左図(a)において、負荷端子の電圧と電流は基準電圧と電流となり、

$$V_0 = E_g / 2, \quad I_0 = E_g / (2Z_s) \quad (3.38)$$

である。また、 Z_s を純抵抗とすれば、基準電力となる消費電力は

$$P_0 = |E_g|^2 / (4Z_s) \quad (3.39)$$

となる。右図(b)のように、同じ電源回路に負荷 Z_L を接続したとき、負荷端子の電圧は

$$V_L = \frac{Z_L}{Z_s + Z_L} E_g = \frac{2Z_L}{Z_s + Z_L} \left(\frac{E_g}{2} \right) = \frac{2Z_L}{Z_s + Z_L} V_0 \equiv TV_0 \quad (3.40)$$

となるので、この電圧は基準電圧に対しての比率が

$$T = \frac{2Z_L}{Z_s + Z_L} \quad (3.41)$$

となる。即ち、これが負荷に伝わる「基準電圧に対する負荷電圧」である透過係数を意味することになる。この負荷端子には左側から基準電圧 1 が到来すると、その一部が右側負荷に透過し、一部が左側に反射することになる。したがって、反射係数を Γ とすれば、同じポートを左側から見た場合と右側から見た場合とは等しくなるはずである。この関係から、 Γ は

$$1 + \Gamma = T \Rightarrow \Gamma = T - 1 = \frac{Z_L - Z_s}{Z_L + Z_s} \quad (3.42)$$

の関係にあることが分かる。

VNA で被測定物 (DUT) の特性を測定するときは、図の電源回路と基準抵抗の間に回路網を図のように挿入したときである。

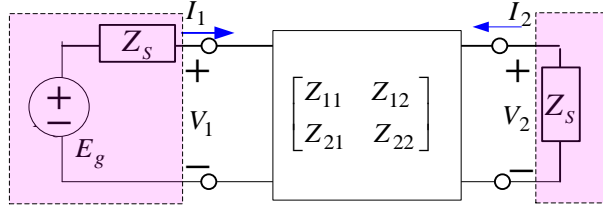


図 3.9 VNA で DUT を測定するときの回路構成

DUT を回路網で表示したときの各ポートの端子条件は、各ポートの電圧電流を図に示すようにすると、

$$V_1 = E_g - Z_s I_1, \quad V_2 = -Z_s I_2 \quad (3.43)$$

または、 $Z_s = 1/Y_s$ として

$$I_1 = Y_s E_g - Y_s V_1 \equiv J_g - Y_s V_1, \quad I_2 = -Y_s V_2 \quad (3.44)$$

である。

出力（負荷）ポートの端子条件をインピーダンス行列表示の回路網に適用し、回路網の左（入力）ポートから右を見た入力インピーダンスは

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ -Y_s V_2 \end{bmatrix} \Rightarrow V_2 = \frac{Z_{21}}{1 + Z_{22} Y_s} I_1 \\ \Rightarrow Z_{in} &= \frac{V_1}{I_1} = Z_{11} - \frac{Z_{12} Z_{21} Y_s}{1 + Z_{22} Y_s} = Z_{11} - \frac{Z_{12} Z_{21}}{Z_s + Z_{22}} \end{aligned} \quad (3.45)$$

と求まる。この結果、回路網の入力ポートにおける反射係数 Γ_{in} は(3.42)式から

$$\Gamma_{in} = \frac{Z_{in} - Z_s}{Z_{in} + Z_s} = \frac{(Z_{11} - Z_s)(Z_s + Z_{22}) - Z_{12} Z_{21}}{(Z_{11} + Z_s)(Z_s + Z_{22}) - Z_{12} Z_{21}} = \Gamma_{11} \quad (3.46)$$

となる。また出力ポートの電圧 V_2 は、インピーダンス行列の電流表示で書き換えて

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_g - Y_s V_1 \\ -Y_s V_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} J_g \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Y_s & 0 \\ 0 & Y_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \right\} \quad (3.47)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 + Z_{11} Y_s & Z_{12} Y_s \\ Z_{21} Y_s & 1 + Z_{22} Y_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} \\ Z_{21} \end{bmatrix} J_g \Rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + Z_{11} Y_s & Z_{12} Y_s \\ Z_{21} Y_s & 1 + Z_{22} Y_s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Z_{11} \\ Z_{21} \end{bmatrix} J_g \quad (3.48)$$

これから、 $J_g = Y_s E_g$ であるので、

$$V_2 = \frac{\{Z_{21}(1 + Z_{11} Y_s) - Z_{11} Z_{21} Y_s\} Y_s}{(1 + Z_{11} Y_s)(1 + Z_{22} Y_s) - Z_{12} Z_{21} Y_s^2} E_g = \frac{2 Z_{21} Z_s}{(Z_s + Z_{11})(Z_s + Z_{22}) - Z_{12} Z_{21}} \left(\frac{E_g}{2} \right) \quad (3.49)$$

$$\Rightarrow \frac{V_2}{V_0} = \frac{2 Z_{21} Z_s}{(Z_s + Z_{11})(Z_s + Z_{22}) - Z_{12} Z_{21}} \equiv T_{21} \quad (3.50)$$

となり、この右辺で与えた係数が負荷に到達する電圧(波)の透過係数になる。電源回路を出力端側にもつてきて添え字の 1 と 2 を変更することで、同様な反射係数と透過係数を求めることができる。

ここで、行列 \mathbf{Z}_s を \mathbf{Z}_s を要素とする対角行列として、反射係数を次の様に行列形式に拡張すると、

$$\begin{aligned}
\Gamma_{in} &= (\mathbf{Z} - \mathbf{Z}_S)(\mathbf{Z} + \mathbf{Z}_S)^{-1} = \begin{bmatrix} Z_{11} - Z_S & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} - Z_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{11} + Z_S & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} + Z_S \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \frac{1}{(Z_{11} + Z_S)(Z_{22} + Z_S) - Z_{12}Z_{21}} \begin{bmatrix} (Z_{11} - Z_S)(Z_{22} + Z_S) - Z_{12}Z_{21} & 2Z_S Z_{12} \\ 2Z_S Z_{21} & (Z_{22} - Z_S)(Z_{11} + Z_S) - Z_{21}Z_{12} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & T_{12} \\ T_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.51}$$

この式の要素は、主対角要素が各ポートから回路網を見た反射係数で、非対角要素は他ポートへの透過係数を表現していることが分かる。

一方、ポート電圧、電流を出射波、入射波との関係の \mathbf{S} 行列の定義から求め、インピーダンス行列 \mathbf{Z} を用いて表現すると、 \mathbf{Z}_S で除した(割った)正規化インピーダンス行列 $\mathbf{z} = \mathbf{Z} / \mathbf{Z}_S$ を用いて、次のようになる。(附録 3 参照)

$$\mathbf{S} = \{\mathbf{z} + \mathbf{U}\}^{-1} \{\mathbf{z} - \mathbf{U}\} = \{\mathbf{z} - \mathbf{U}\} \{\mathbf{z} + \mathbf{U}\}^{-1} = \{\mathbf{Z} + \mathbf{Z}_S \mathbf{U}\}^{-1} \{\mathbf{Z} - \mathbf{Z}_S \mathbf{U}\} = \{\mathbf{Z} - \mathbf{Z}_S \mathbf{U}\} \{\mathbf{Z} + \mathbf{Z}_S \mathbf{U}\}^{-1} \tag{3.52}$$

ここで、 \mathbf{U} は単位行列である。また、正規化アドミッタンス行列 $\mathbf{y} = \mathbf{Y} / \mathbf{Y}_S$ で表現すると、

$$\mathbf{S} = \{\mathbf{U} + \mathbf{y}\}^{-1} \{\mathbf{U} - \mathbf{y}\} = \{\mathbf{U} - \mathbf{y}\} \{\mathbf{U} + \mathbf{y}\}^{-1} = \{\mathbf{Y}_S \mathbf{U} + \mathbf{Y}\}^{-1} \{\mathbf{Y}_S \mathbf{U} - \mathbf{Y}\} = \{\mathbf{Y}_S \mathbf{U} - \mathbf{Y}\} \{\mathbf{Y}_S \mathbf{U} + \mathbf{Y}\}^{-1} \tag{3.53}$$

となる。逆にインピーダンス行列およびアドミッタンス行列を \mathbf{S} 行列で表現すると、

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_S \mathbf{z} = \mathbf{Z}_S \{\mathbf{U} + \mathbf{S}\} \{\mathbf{U} - \mathbf{S}\}^{-1}, \quad \mathbf{Y} = \mathbf{Y}_S \mathbf{y} = \mathbf{Y}_S \{\mathbf{S} - \mathbf{U}\} \{\mathbf{S} + \mathbf{U}\}^{-1} \tag{3.54}$$

となる。

以上のことから、**S 行列は拡張した反射係数**とも言える。

実験1：測定した \mathbf{S} 行列から他の行列要素の関係を用いて、素子の性質を知る

集中定数回路素子で構成される回路網の解析手法を示した。集中定数素子とは、大きさが使用する周波数の波長に比べて非常に小さいこと、極限的な条件では一点に集中している素子で近似できることである。しかし、高周波になってくると、そのような条件を満足するものは少ない。例えば、いくら小さな回路素子であっても、それらを接続する配線が長いと素子の動作が保証されるのか、が問題となる。これを理解するために、以下の実験からこれを体験する。

問 次の基本的な回路網の \mathbf{S} 行列を求め、使用された素子の周波数特性を求め、その性質を検討せよ。

実験 1.1 1本の抵抗からなる T 型回路

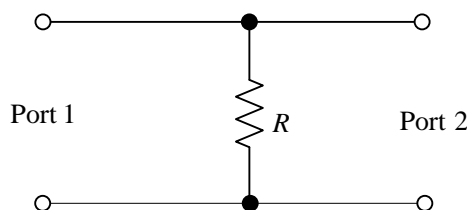
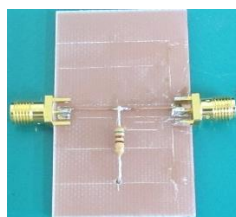


図 3.10 抵抗 1 個を並列腕に入れた測定回路(公称値 $R=50\cdot\Omega$)

使用した抵抗の公称値は $50\cdot\Omega$ であるので、インピーダンス行列から散乱行列を求めると

$$(3.12)\text{式から } \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} R & R \\ R & R \end{bmatrix}_{R=50} \Rightarrow (3.52)\text{式から } \mathbf{S} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |\mathbf{S}|_{\text{in dB}} = \begin{bmatrix} -9.5 & -3.5 \\ -3.5 & -9.5 \end{bmatrix}$$

と予測される。

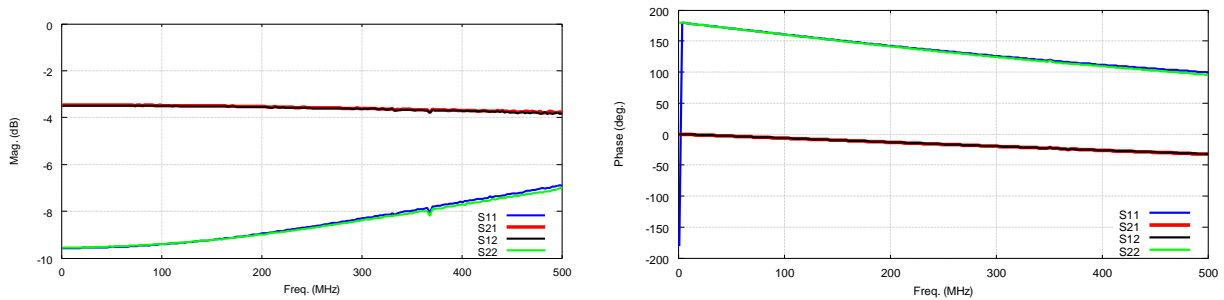


図 3.11 測定値をまとめてグラフ化した \mathbf{S} 行列：左図は振幅特性、右図は位相特性

この予測値は低周波では一致している。図 3.10 の写真で示した実回路を考えたとき、リード線をインピーダンス素子として取り扱えば、次の T 型等価回路になる。このときの各回路素子はどのように評価されるかを調べる。

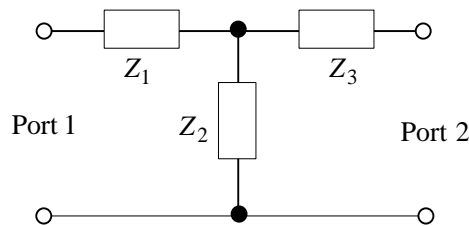


図 3.12 測定結果から考えられるインピーダンス素子で表現する等価回路

測定された \mathbf{S} 行列の要素を複素数で求め、(3.53)式からインピーダンス行列に変換すると

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_s \{ \mathbf{U} + \mathbf{S} \} \{ \mathbf{U} - \mathbf{S} \}^{-1} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_2 \\ Z_2 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix}$$

であるので、

$$Z_1 = Z_{11} - Z_{12}, \quad Z_2 = Z_{12}, \quad Z_3 = Z_{22} - Z_{21}$$

と各素子を求めることができる。これらを求めた結果が次である。

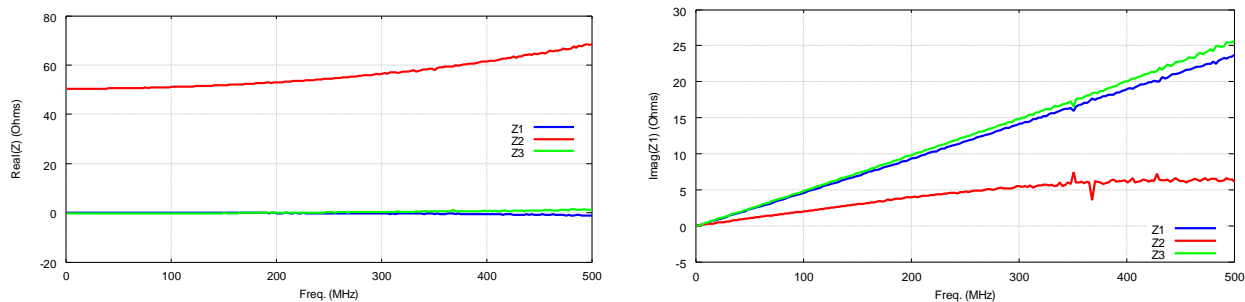


図 3.13 T 型回路として、それぞれの素子のインピーダンスを実部と虚部に分離した周波数特性

この結果から、ポート間のリード線 (Z_1 と Z_3) は、インピーダンス成分として捉えると、実部（抵抗）成分は非常に小さいことを示しているが、虚部は周波数に比例した**正のリアクタンス素子**となっているので、**インダクタンス**として働いていることが分かる。このインダクタンスはリアクタンスの周波数に関する変化分として評価でき、この例では、周波数 100 MHz の変化に対してリアクタンスは $5\ \Omega$ の変化であるので、 $L = 5 / (2\pi \times 100 \times 10^6) = 8\ (\text{nH})$ となる。

並列部に入れた抵抗は、200 MHz ぐらい迄の周波数域では約 $50\ \Omega$ の値を示しているが、同時に**正のリアクタンス**（インダクタンス）成分も存在していることを示している。

（注：この実験では**意図的に長いリード線を使用**している。）

実験 1.2: 3 本の抵抗素子で構成するII型回路

このモデルは、リード線の付いた 3 個の抵抗を II 型に組んだものである。

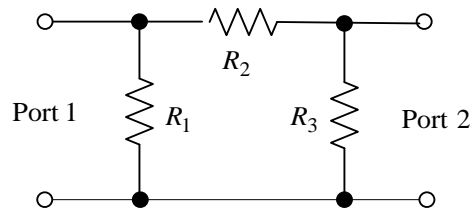
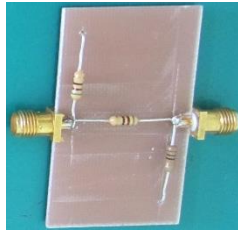


図 3.14 II 型に配置した抵抗素子の測定回路（公称値は $R_1 = 50 \Omega$, $R_2 = 50 \Omega$, $R_3 = 10 \Omega$ ）

公称抵抗値から低周波での $|S_{11}|$ を予想すると、この回路のアドミッタンス行列から散乱行列は

$$(3.13) \text{式から} \Rightarrow Y = \begin{bmatrix} 1/R_1 + 1/R_2 & -1/R_2 \\ -1/R_2 & 1/R_2 + 1/R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.04 & -0.02 \\ -0.02 & 0.12 \end{bmatrix} \Rightarrow (3.53) \text{式から}$$

$$S = \{Y_S U - Y\} \{Y_S U + Y\}^{-1} = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.1 \\ 0.1 & -0.7 \end{bmatrix} \Rightarrow |S|_{\text{in dB}} = \begin{bmatrix} -10.5 & -20.0 \\ -20.0 & -3.1 \end{bmatrix}$$

と予測できる。この予測値は測定値と概ね一致している。

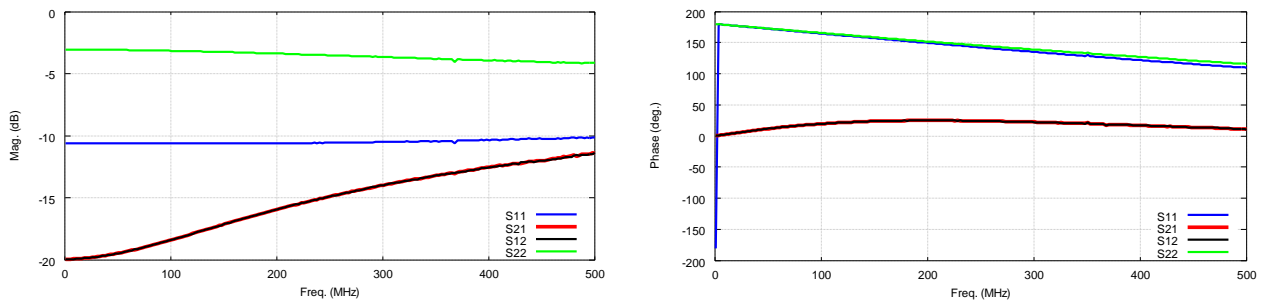


図 3.15 測定値 S 行列の周波数特性

リード線がついた抵抗素子をインピーダンス(アドミッタンス)素子として図 3.16 のように表現する。

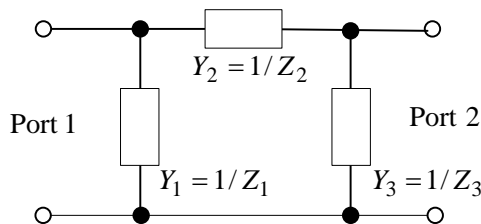


図 3.16 等価回路

S 行列の要素を複素数で表示すると、アドミッタンス行列が

$$Y = Y_S \{S - U\} \{S + U\}^{-1} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 & -Y_2 \\ -Y_2 & Y_2 + Y_3 \end{bmatrix}$$

であるので、II 型の各素子がアドミッタンスで

$$Y_1 = Y_{11} + Y_{12}, \quad Y_2 = -Y_{12}, \quad Y_3 = Y_{22} + Y_{21}$$

と求められる。アドミッタンス表示された各素子をインピーダンス表現に変換して示すと、次のようになる。

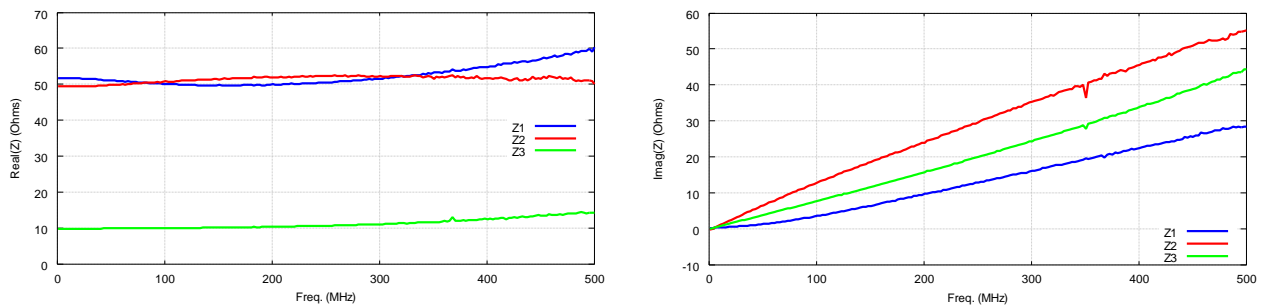


図 3.17 Π 型回路として、それぞれの素子のインピーダンスを実部と虚部に分離した周波数特性

以上の結果は、公称値 $50\ \Omega (=R_1) - 50\ \Omega (=R_2) - 10\ \Omega (=R_3)$ の抵抗構成であることを示しており、リード線がインダクタンスとして働いていることが理解でき、300 MHz 程度までは抵抗素子として動作しているがそれ以上の周波数では、直流での抵抗値と違う値になっていくことが分かる。

実験 2: キャパシタの ESR と ESL

実際に使用するキャパシタはリード線が必要である。その場合の素子がどのように評価できるかを考える。ここで回路は直列腕にはリード線のみで、並列腕にリード線付きのキャパシタをもつ T 型回路を構成した回路である。このリード線付きのキャパシタの振る舞いを測定する。キャパシタの公称値は 12 nF である。

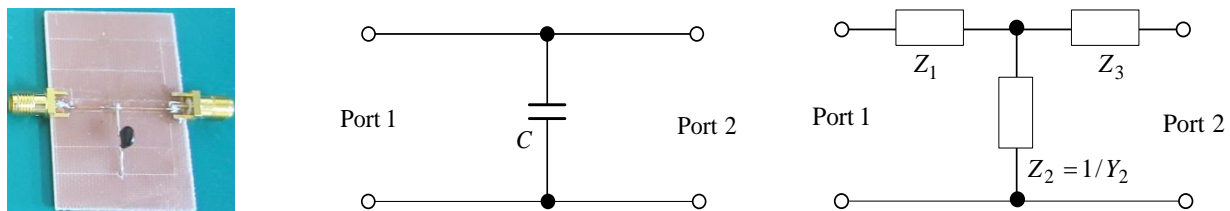


図 3.18 並列腕にキャパシタンスを持つ T 型回路および等価回路

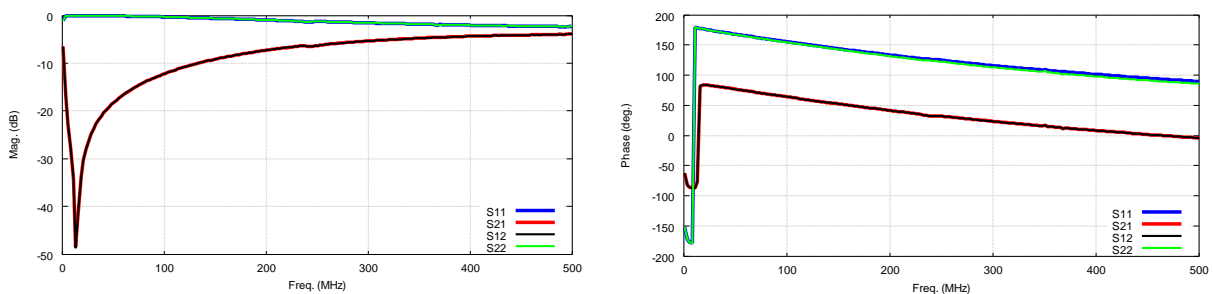


図 3.19 測定値を取り込んでまとめた S 行列の周波数特性(500 MHz まで)

この結果は、20 MHz 付近の周波数域で共振現象が発生していることが分かる。改めて 50 MHz までの

CAL データを使用して、測定すると以下ようになった。

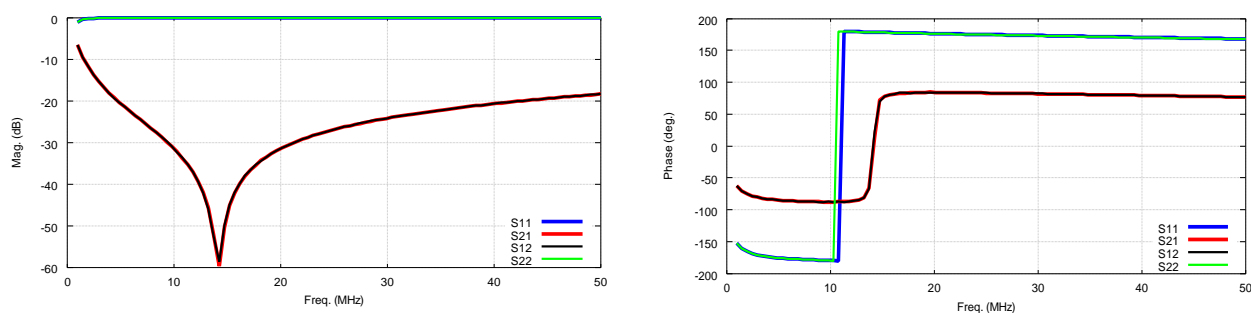


図 3.20 50 MHz まで拡大した測定結果

50 MHz までの測定結果からキャパシタのインピーダンス特性を求めると以下ようになる。

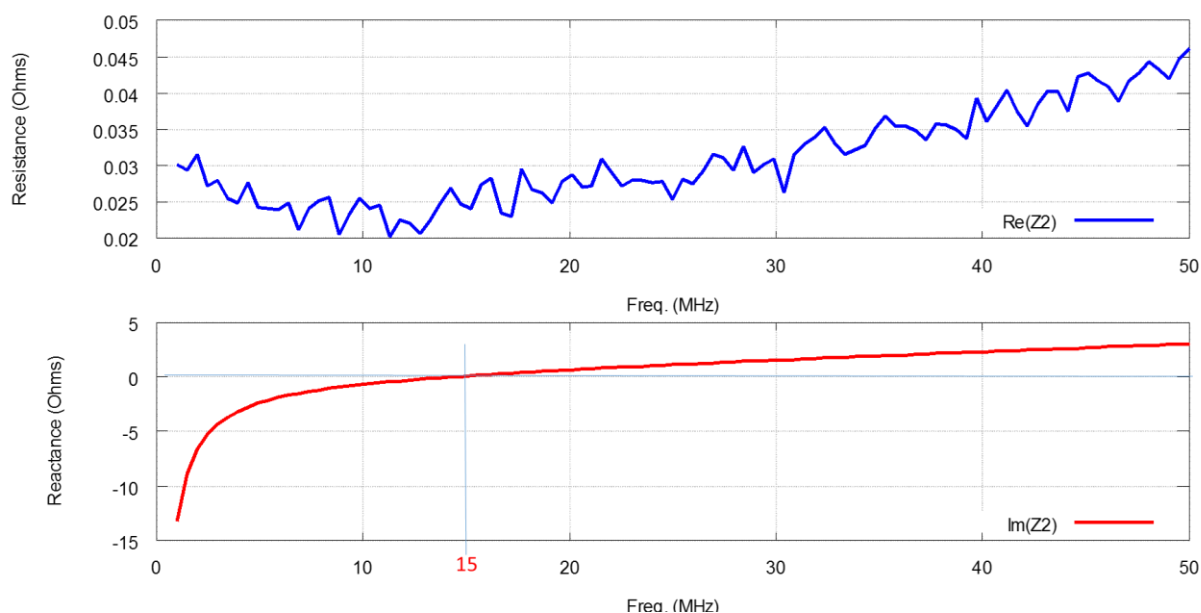


図 3.21 50 MHz までのインピーダンス素子で評価した結果

この結果は、インピーダンスの実部（抵抗成分）は凹型の周波数特性を有していること、約 15 MHz 付近で直列共振しており(このときインピーダンスの虚部、リアクタンスはゼロ)、これ以下の周波数帯域でリアクタンスが負であるのでキャパシタとして動作しているが、これ以上の帯域では正となりインダクタとして動作していることを示している。ここでの抵抗成分が ESR(Effective Series Resistance:実効直列抵抗)であり、インダクタンス成分が ESL (Effective Series L : 実効直列 L)と呼ばれている。

注：この例でも、キャパシタに意図的に長いリード線が接続されているモデルであることに注意。

ここで、ESR を評価することを考える。図 3.21 の ESR 特性は 10 MHz 付近を最低値として凹型となっていること、理想的なキャパシタでは直流電流を通さない、即ち抵抗分が無限大となることを考慮すると、この Z_2 の等価回路モデルは

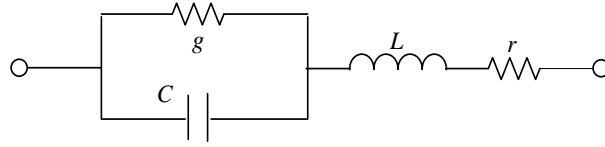


図 3.22 等価キャパシタの等価回路

となる。ここで、 g はキャパシタの誘電体の損失を意味するコンダクタンス(抵抗の逆数)であり、 r はキャパシタの極板とリード線に起因する抵抗である。この等価回路のインピーダンスは

$$Z_2 = r + j\omega L + \frac{1}{g + j\omega C} = r + \frac{g}{g^2 + (\omega C)^2} + j \left\{ \omega L - \frac{\omega C}{g^2 + (\omega C)^2} \right\}$$

この実部の抵抗成分は周波数が 0 (直流) と非常に高くなった状態を調べると、

$$\Re\{Z_2(\omega)\}\Big|_{\omega \rightarrow 0} \rightarrow r + \frac{1}{g}, \quad \Re\{Z_2(\omega)\}\Big|_{\omega \rightarrow \infty} \rightarrow r$$

である。直流においては、キャパシタが電流を流さない状態になるためには、 $g \rightarrow 0$ ($1/g \rightarrow \infty$) となることであるので、図 3.21 の抵抗成分の周波数特性において低域側ほど抵抗成分が増大している理由は g が主流になることを、高域側では r が主流になることを意味している。図 3.21 で求められた寄生抵抗成分の ESR は周波数によって変化していることが分かる。

また、この例においては C と L を測定した周波数の最低周波数と最高周波数における虚部の値から

$$C = \frac{1}{\omega \Im\{Z_1(\omega)\}} \Big|_{f=1 \text{ kHz}} \approx 12 \text{ (nF)}, \quad L = \frac{\Im\{Z_1(\omega)\}}{\omega} \Big|_{f=50 \text{ MHz}} \approx 9.76 \text{ nH}$$

と近似できる。虚部が零となる周波数 $f_0 = \omega_0/(2\pi)$ は、 $g \ll \omega C$ である周波数域において発生し、

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \approx 15 \text{ MHz}$$

であり、この周波数以下においてキャパシタとして動作することを意味している。

これらの実験結果は、回路素子の値は、周波数が高くなると保証されなくなり、素子に接続されているリード線の影響が大きくかかわってきていることが理解できる。このリード線の取扱いをどのようにするかは次節からの伝送線路論による取扱いである。

4. 伝送線路

回路素子に接続した配線や、信号を伝えるための長い線はどんな性質をもっているのかが問題となることを前節で体験した。ここでは、次の実験から**伝送線路とは何か**をまず体験する。

注：以下の実験において使用する基板は長さ 20 cm、厚さ 1.6 mm の FR4 基板である。また、パターン線の幅は約 2 mm であり、銅箔を剥いだ自作の線路であるために**線幅は保証されない**ことに注意。

実験 3：十分なレベルの信号を伝送する伝送線路の条件

実験 3.1 片面基板で作成した 1 本のパターン線(DUT)の終端を開放にして、DUT の S_{11} を測定せよ。

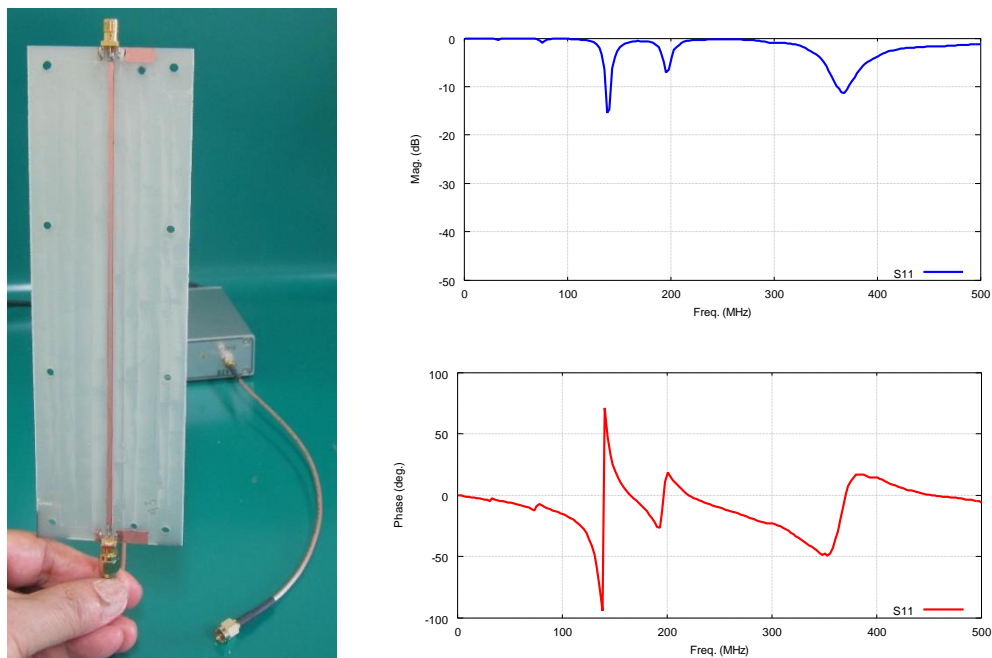


図 4.1 片面基板で作成した 1 本のパターン線だけの s_{11} 特性：図は振幅特性と位相特性
(注：この特性は、線がおかれた状況・環境によって変化する。)

問：この結果から、この DUT はどんな働きをしているのか考察せよ。

実験 3.2：この DUT の両端子を VNA の両ポートに接続し、S 行列を測定せよ。

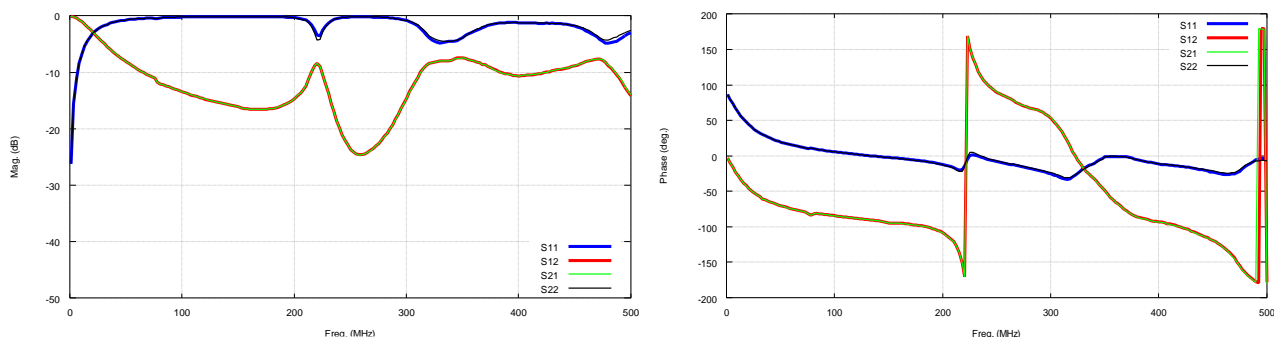


図 4.2 測定例

注：特性は、線がおかれた状況によって変化することを確かめよ。

実験 3.3: この DUT に、さらに測定同軸ケーブルの GND 端子間を細い導線で接続し、DUT を 2 導体線路としたときの S 行列を測定せよ。

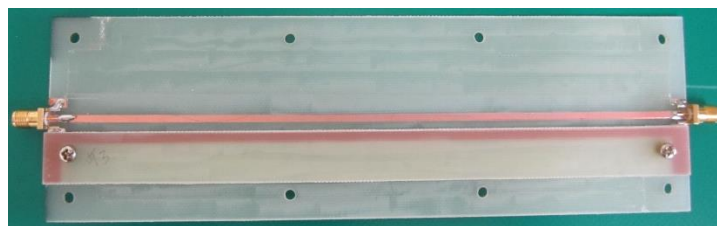


図 4.3 2 導体線路にしたモデル

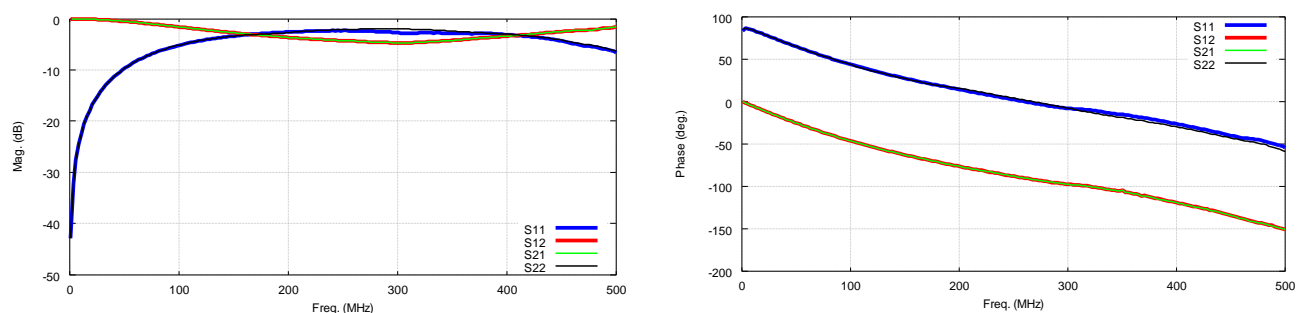


図 4.4 2 導体線路にしたときの測定例

問：実験 3.2 の結果と比較して、何が言えるか。それは、何を比較することによって結論づけることができるのか。

実験 3.4: 上記実験 3.1 に使用した DUT のパターン線の下面に GND 面を張り付け、マイクロストリップ線路(グラウンド面上に誘電体媒質を挟んで配線された信号線からなる伝送線路)としたとき、S 行列を測定せよ。



(注：写真において、銅箔が見える基板とパターン線の基板が完全に重なるようにする)

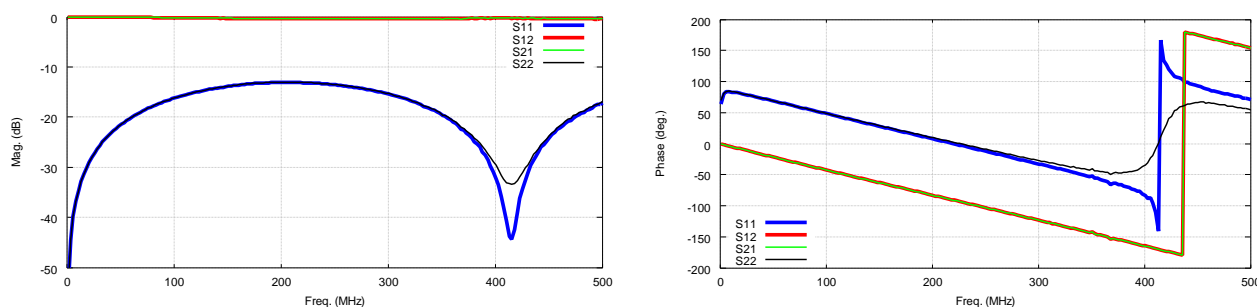


図 4.5 マイクロストリップ線路としたときの S 行列測定例

問：直流以外で S_{11} が極小(null)となる周波数では、どのような現象が発生しているときか。（理論との対応は後述）

問：放射損を含む損失係数を実験 3.2～3.4 の結果と比較せよ。

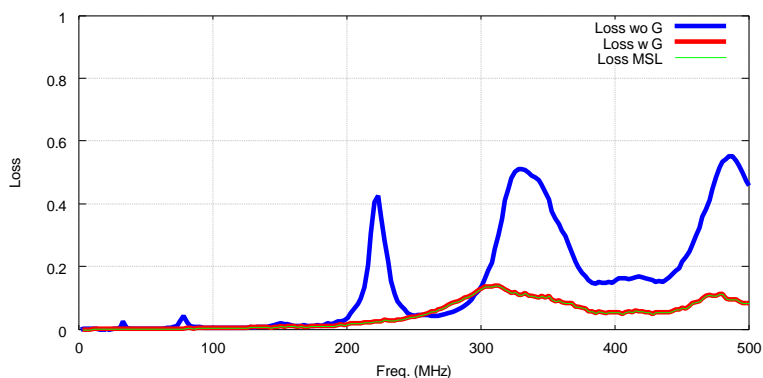


図 4.6 損失係数の計算例（縦軸は dB ではないことに注意）

この結果は、1本の線だけでは効率よく信号の伝送はできないことを示している。

上記の実験 3 から理解できることは、広帯域に信号を伝送するためには導体が 2 本(個)以上必要である。信号を伝送するための線路はケーブル（一般的には伝送線路 transmission line）と呼ばれるものである。

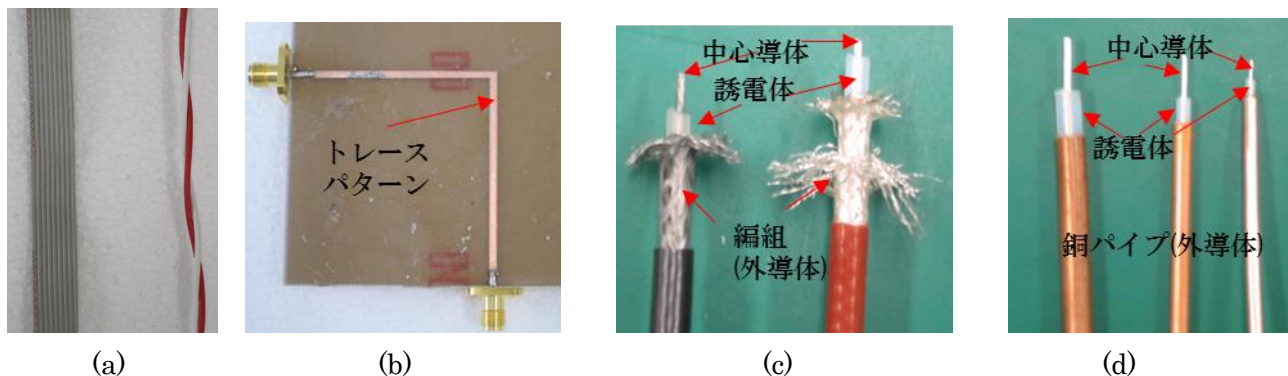


写真 4.1 伝送線路の例：フラットケーブル(左)と撚り対線(a)、マイクロストリップ線路(b)、同軸線路(左は一重編組、右は二重編組)(c)、セミリジッドケーブル(d)

電圧は静電界と（導電）電流は静磁界に対応している。直流電力は電圧と電流の積で与えられている。交流における電圧や電流は、集中定数素子に対して静電磁界の場合と同様に定義されており、伝送線路の場合は後述の TEM(Transverse Electromagnetic)モードで伝送されることが条件である。電力は、交流においては、例えば複素電力で考えると、実部が有効（平均）電力、虚部が無効電力として取り扱っている。電磁界ではどのように考えるかと言えば、ベクトルの積は外積（ベクトル積）と内積（スカラ

積)とがあるが、電力の流れは外積で表現される。これはポインティング(Poynting)ベクトルと呼ばれており、 $\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$ で与えられる。すなわち電界から磁界の方向に右ねじを回す方向に電力密度の流れがあることを意味する。

4.1 平衡線路と不平衡線路

線路に信号を伝送するとき、その線路では回路的には電圧や電流、電磁界的には電界や磁界が、どのようになっているかが問題である。伝送線路では通常長い線路を基本として考え、どの切断面を見ても金太郎飴のように同じという条件で考える。このとき、線路横断面(切断面)での線路間が、使用する波長より十分に小さいという条件があると、断面の電磁界は静電磁界と同じになる。このときの電磁界は無損失のとき **TEM(transverse electromagnetic)**モードと呼ばれる電磁界の姿態(mode)である。

2 導体系の伝送線路には、**平衡形(balanced type)**と**不平衡形(unbalanced type)**がある。図 4.7 に平衡形伝送線路(平行 2 本線路)の例として円形導体の伝送線路における線路断面の電磁界(TEM モード)を示す。**平衡形**伝送線路とはそれぞれの「**導体線に等振幅で 180° の位相差(等量異符号)の信号を流す方式**」の線路であり、図 4.7 の構造では上下対称な電磁界が発生している。

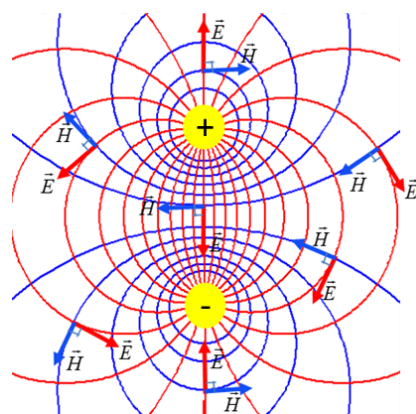


図 4.7 平衡形伝送線路の例(垂直配置の円形導体線路)：赤線が電界(電気力線)、青線が磁界(磁力線)

通常、平衡形伝送線路とは同じ断面構造の 2 本の導体線である。図 4.7 の図中で赤い線が電気力線(電界)であり、青い線が磁力線(磁界)である。上側の円形導体(黄色)がプラスで、下側の円形導体(黒)がマイナスであれば、電界は上側の導体から下側の導体に向かう。2 導体の中心を結ぶ線の中点を通る直交線上は、電位ゼロの線(3 次元的には電位ゼロの面)となる。すなわち「**仮想的な基準面が線の間中に存在する**」ことになる。電流は上側の導体では進行方向に流れるので、磁界は右回りであり、下側の導体には逆向きに流れるので、左回りの磁界が発生する。この結果、線路間では両方の磁界成分とも右から左に向かう方向にある。図に示すように、断面のあらゆる位置で電界と磁界は直交し、**電界から磁界の方に右ねじを回す方向は**、紙面の前面から裏面に垂直に突き抜ける方向であり、この方向に**電力が運ばれている**。

不平衡形伝送線路とは、「**2 導体のうち 1 導体がグラウンド面(基準面)**」となっているものである。一つの導体を平板グラウンド面とするものがマイクロストリップ線路であり、外導体と呼ばれる円筒導体や編組導体をグラウンドとするのが同軸線路である。一見異なる種類の線路のように見えるが、例えば、

図 4.8(a)のグラウンド面を丸めて平板導体を包み込むと内導体が平板の同軸線路となる。図 4.8(b)から見ると、外導体を切って広げたグラウンド面を作ると、マイクロストリップ線路とすることができる。

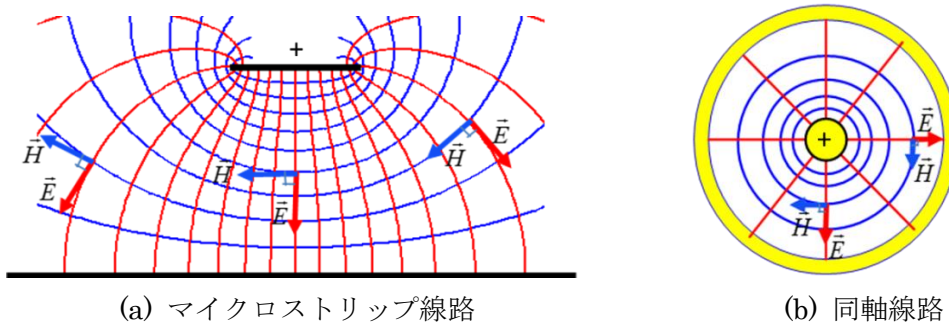


図 4.8 不平衡形伝送線路：マイクロストリップ線路(a)と同軸線路(b)

この線路系では、常に「**電位零のグラウンドとプラスマイナスに変化する信号線**」からなっている。

以上のように、伝送線路は電磁界を効率よく伝送する通路を形成する「**導波路**」であり、この導波路の電磁界は進行方向の電磁界成分を持たない TEM モードである。伝送線路の TEM モードは線路断面において静電磁界と同じであるので、電圧電流が直流の場合と同じように定義できる。すなわち、**伝送線路の電圧電流とは、ベクトルである TEM モード電磁界をスカラーの電圧電流に読み替えた結果である。**さらに伝送線路を伝搬する**電力またはエネルギーは、本質的に電磁界が担っている**ことになる。

4.2 回路論的な意味

伝送線路の振る舞いを表現する回路論的な表現は、Heaviside の電信方程式である。回路論においては無限に長い伝送線路において、単位長さ当たりのキャパシタンスとインダクタンスが与えられているところから始まる。

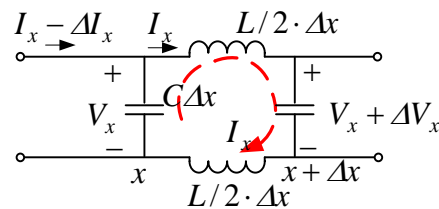


図 4.9 2本の平行な導体線路の微小区間での等価回路

図 4.9 の微小区間 Δx に、キルヒホッフの電圧則(KVL)とキルヒホッフの電流則(KCL)を適用すると、

$$V_x - j\omega L \Delta x \cdot I_x - (V_x + \Delta V_x) = 0, \quad -I_x - j\omega C \Delta x \cdot V_x + (I_x - \Delta I_x) = 0 \quad (4.1)$$

となる。微小区間の極限值($\Delta x \rightarrow 0$)から、次式の微分方程式

$$-\frac{dV_x}{dx} = j\omega L \cdot I_x \quad -\frac{dI_x}{dx} = j\omega C \cdot V_x \quad (4.2)$$

が導出される。これが Heaviside の電信方程式(Telegrapher's Equations)である。

4.3 電磁界の意味

2本の導体線路による伝送線路が作る電磁界は **TEM モード** である。**TEM モード** という電磁界の姿態は、電磁波が x 方向に進行するとき、進行方向に垂直な平面の $y-z$ 平面(これを **Transverse 面** という)だけに電磁界成分が存在する平面波(位相が揃っている波)である。この平面波の電磁界の姿態例を図 4.10 の左図(a)に示す。

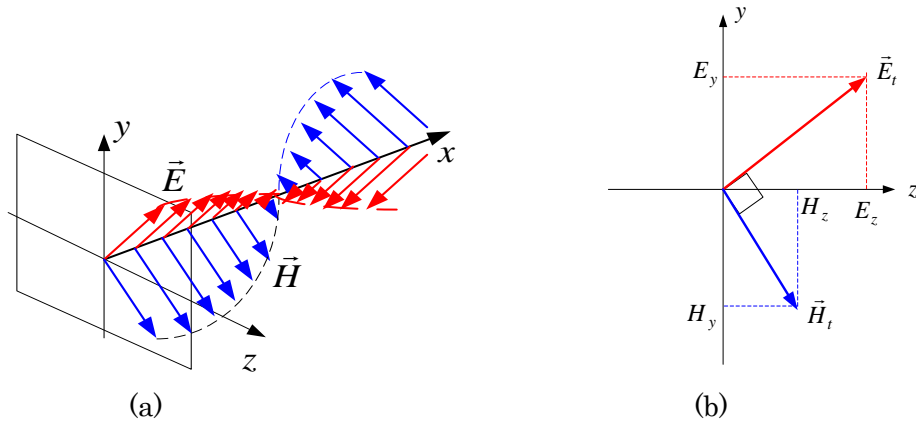


図 4.10 ある瞬間における正弦波状に変化する **TEM** 電磁界の姿態(a)と
トランスバース面($y-z$ 平面)の電磁界成分例(b)

この図はある瞬間の電磁界成分が $y-z$ 面だけに存在し、その成分は、この座標系では右図(b)に示すように電界 \vec{E} と磁界 \vec{H} が y 方向成分と z 方向成分とに分解して表示できる。電磁界成分をそれぞれの成分を意味する添え字を付けて表示すると、(b)で与えた成分は $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ を x, y, z 軸の単位ベクトルとして

$$\vec{E} = \vec{j}E_y + \vec{k}E_z \equiv \vec{E}_t, \quad \vec{H} = \vec{j}H_y + \vec{k}H_z \equiv \vec{H}_t \quad (4.3)$$

となる。**Maxwell** の方程式を上記の成分表示で分解し、進行方向の電磁界は存在しない条件を与えると、**TEM** モードの電磁界が満足しなければならない条件が以下のように導出できる。

$$\text{条件 1:} \quad \nabla_t \times \vec{E}_t = 0 \quad \nabla_t \times \vec{H}_t = 0 \quad (4.4)$$

$$\text{条件 2:} \quad \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} \times \vec{E}_t = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{H}_t \quad \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} \times \vec{H}_t = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}_t \quad (4.5)$$

条件 1 からは、トランスバース面($y-z$ 平面)では電磁界は時間項を含まない静電磁界と同じ表現である。このことは、『**高周波でありながら、電圧や電流が直流の場合と同じように定義できる**』ことを意味している。

条件 2 からは、Heaviside の**電信方程式**が導出できる (附録 4 参照)。線路の電圧と電流に関する微分方程式が

$$-\frac{dV}{dx} = j\omega LI \quad -\frac{dI}{dx} = j\omega CV \quad (4.6)$$

で求められる。これらを x で微分し、お互いに代入しあうと

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \omega^2 LCV = 0 \quad , \quad \frac{d^2I}{dx^2} + \omega^2 CLI = 0 \quad (4.7)$$

と表現でき、波動を表現する **Helmholtz** 方程式を得る。すなわち、これらは伝送線路の**電圧と電流が波動として伝搬**し、その伝搬速度は $v = 1/\sqrt{LC}$ であることを示している。上述したように電界が線路電圧に、

磁界が線路電流に対応している。媒質が空気の場合は、TEM モードの伝搬速度 $v_0 = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ と線路電圧、電流の伝搬速度は等しいことになる。すなわち、 $LC = \mu_0\epsilon_0$ の関係にある。媒質が誘電率 $\epsilon = \epsilon_r\epsilon_0$ の一様な誘電体のときは、 $v = v_0/\sqrt{\epsilon_r}$ となる。さらに媒質が空気と誘電体から構成されているとき、実効的に一様な誘電率の媒質となるときを考え、この等価な誘電率を「実効誘電率 ϵ_{eff} 」という。このときの伝搬速度は $v = v_0\sqrt{\epsilon_{eff}}$ となる。

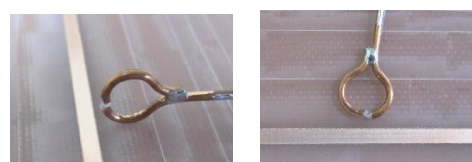
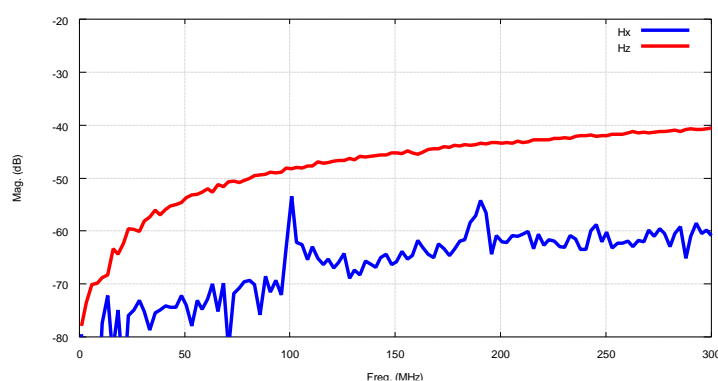
注： $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ (H/m) は真空中の透磁率であり、 $\epsilon_0 \approx 1/(36\pi) \times 10^{-9}$ (F/m) は真空中の誘電率である。

伝送線路に抵抗損が存在すると、電磁波論的(数学的)な厳密な意味では TEM モードではなくなる。実用的(工学的)には、一般の伝送路では抵抗損が小さいとして、あるいは主となる電磁界モードが TEM モードであるとして(このような状態を**準 TEM (quasi-TEM)**モードであると称する)電信方程式を近似している。誘電体に存在する損失(誘電体損)では、線路間(トランスバース面)での電界であるので、依然として TEM モードである。

注： 一般に線路構造が与えられると簡単に線路キャパシタンスが解析関数で求められるものではない。回路基板に用いられるストリップ線路やマイクロストリップ線路では、特に誘電率が一様でない場合は、解析関数で表現することは不可能に近い。このような構造の線路では、数値計算されたものから近似式が作成されている。

実験 3.5：伝送線路が作る電磁界(磁界プローブによる観測)

磁界プローブを図に示すように配置し、VNA のポート 1 を $50\ \Omega$ 終端のマイクロストリップ線路に、ポート 2 を磁界プローブに接続して S_{21} を測定し、プローブ配置による違いを観察せよ。



(a) H_x 観察用 (b) H_z 観察用
磁界プローブの配置

図 4.11 磁界プローブによる伝送線路の磁界観測

5. Heaviside の電信方程式の解表現

Heaviside の電信方程式を線路方向の x で微分し、電圧と電流に関する微分方程式を求めると、

$$\frac{d^2 V_x}{dx^2} + \omega^2 LC \cdot V_x = 0 \quad , \quad \frac{d^2 I_x}{dx^2} + \omega^2 CL \cdot I_x = 0 \quad (5.1)$$

であった。この波動方程式の解法について述べる。

5.1 進行波理論

(5.1)式の解は、線路電圧に関しては、 K_1 と K_2 を定数として指数(exponential)関数で表現すると

$$V(x) = K_1 e^{-j\beta x} + K_2 e^{j\beta x} \quad (5.2)$$

である。ここで、 $\beta = \omega\sqrt{LC} = \omega/v$ である。これを**位相定数**(phase constant)という。距離(位置)による位相変化量を考えると、

$$\beta x = \omega\sqrt{LC}x = \omega(x/v) \quad (5.3)$$

である。このため、伝搬速度 v は回路論的には距離的な位相変化(βx)を規定する速度という意味で、『**位相速度**』と言う。したがって、位相速度は線路インダクタンスと線路キャパシタンスの積の平方の逆数で与えられる『伝送線路の特性を規定する重要なパラメータ』となる。

(5.2)式の右边第1項は、 $x=0$ での線路電圧を基準にしたとき、 x が大きくなるにしたがって線路電圧の位相が遅れることを、第2項は位相が進むことを意味している。したがって、第1項の成分は進行していく波の『**進行波**(forward wave)』を、第2項は後退している波の『**後退波**(backward wave)』を意味していることになる。また、これは進行してくる波が『**入射波**(incident wave)』と捉えると後退している波は『**反射波**(reflected wave)』となる。

今、 $x=0$ における進行波が V_{f0} で、後退波が V_{b0} であるとすれば、

$$V(x) = V_{f0} e^{-j\beta x} + V_{b0} e^{j\beta x} = V_{f0} \{e^{-j\beta x} + \Gamma_0 e^{j\beta x}\} \quad (5.4)$$

と表現できる。ここで、

$$\Gamma_0 = \frac{V_{b0}}{V_{f0}} \quad (5.5)$$

は、 $x=0$ における**電圧反射係数**(voltage reflection coefficient)である。一般に反射係数と言えば、この電圧反射係数を意味する。

線路電流に関しては、(5.4)式を微分して(4.6)式の第2式に等しいとおくと、

$$\begin{aligned} -\frac{dV(x)}{dx} &= j\beta V_{f0} \{e^{-j\beta x} - \Gamma_0 e^{j\beta x}\} = j\omega LI(x) \quad \Rightarrow \quad I(x) = \frac{\beta}{\omega L} V_{f0} \{e^{-j\beta x} - \Gamma_0 e^{j\beta x}\} \\ \Rightarrow \quad I(x) &= \frac{V_{f0}}{Z_0} \{e^{-j\beta x} - \Gamma_0 e^{j\beta x}\} \end{aligned} \quad (5.6)$$

ここで、 Z_0 は『**特性インピーダンス**』と呼ばれ、

$$Z_0 = \omega L / \beta = \omega L / (\omega\sqrt{LC}) = \sqrt{L/C} \quad (5.7)$$

で定義される量であり、これは線路インダクタンスと線路キャパシタンスの比の平方根で与えられる『**伝送線路の性質を表現する重要なパラメータ**』である。

上記に示した線路電流の表現では、電流反射係数が電圧反射係数を用いて表現されている。このとき電流反射係数と電圧反射係数とは位相差が 180° (**逆相**)の関係にあることが分かる。

終端 $x=l$ において端子条件が $V(l)/I(l)=Z_l$ であれば、

$$V(x)=V_{f0}e^{-j\beta x}+V_{b0}e^{j\beta x}=V_{f0}\{e^{-j\beta x}+\Gamma_0e^{j\beta x}\} \Rightarrow V(l)=V_{f0}\{e^{-j\beta l}+\Gamma_0e^{j\beta l}\} \quad (5.8)$$

$$I(x)=\frac{V_{f0}}{Z_0}\{e^{-j\beta x}-\Gamma_0e^{j\beta x}\} \Rightarrow I(l)=\frac{V_{f0}}{Z_0}\{e^{-j\beta l}-\Gamma_0e^{j\beta l}\} \quad (5.9)$$

であるので、

$$Z_l=\frac{V(l)}{I(l)}=Z_0\frac{e^{-j\beta l}+\Gamma_0e^{j\beta l}}{e^{-j\beta l}-\Gamma_0e^{j\beta l}}=Z_0\frac{1+\Gamma_0e^{j2\beta l}}{1-\Gamma_0e^{j2\beta l}} \Rightarrow \Gamma_0=\frac{Z_l-Z_0}{Z_l+Z_0}e^{-j2\beta l}\equiv\Gamma_le^{-j2\beta l} \quad (5.10)$$

となる。すなわち伝送線路から負荷を見るときの反射係数は

$$\Gamma_l=\frac{Z_l-Z_0}{Z_l+Z_0} \quad (5.11)$$

であり、終端から距離 l の入力端で観測する **反射係数の位相変化は βl ではなく、 $2\beta l$ の位相遅れ**があることを意味している。

定在波 (Standing Wave)

伝送線路の任意点の電圧は

$$V(x)=V_{f0}\{e^{-j\beta x}+\Gamma_0e^{j\beta x}\}, \quad \Gamma_0=\frac{Z_l-Z_0}{Z_l+Z_0}e^{-j2\beta l}\equiv\Gamma_le^{-j2\beta l}=|\Gamma_l|e^{j\phi}e^{-j2\beta l}$$

であるので、この大きさを調べると、

$$V(x)=V_{f0}e^{-j\beta x}\{1+|\Gamma_l|e^{-j(2\beta l-\phi)}e^{j2\beta x}\}=V_{f0}e^{-j\beta x}\{1+|\Gamma_l|e^{j\phi}e^{j2\beta(x-l)}\}$$

$$\frac{V(x)}{V_{f0}}=e^{-j\beta x}\{1+|\Gamma_l|e^{j\phi}e^{j2\beta(x-l)}\} \Rightarrow \left|\frac{V(x)}{V_{f0}}\right|=\sqrt{1+2|\Gamma_l|\cos\{2\beta(l-x)-\phi\}+|\Gamma_l|^2} \quad (5.12a)$$

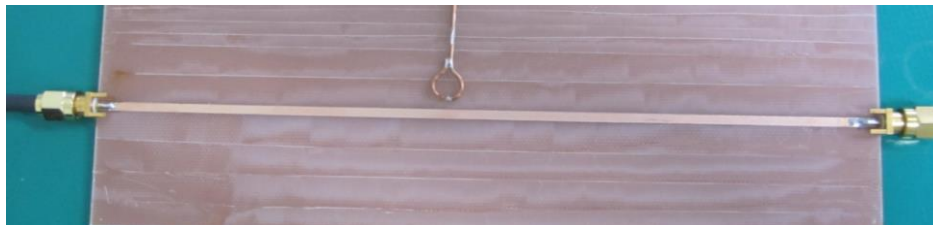
これが電圧**定在波** (voltage standing wave) と呼ばれるもので、一般に「定在波」と呼ばれるのは電圧定在波である。(注：日本においては単に VS (ブイエス) と言ったりする)

電流定在波についても同様に導出でき、

$$\left|\frac{I(x)}{V_{f0}/Z_0}\right|=\sqrt{1-2|\Gamma_l|\cos\{2\beta(l-x)-\phi\}+|\Gamma_l|^2} \quad (5.12b)$$

となり、電圧定在波とは同じ形状で、その位置がずれているだけである。

【参考実験】次図は、(a)がマイクロストリップ線路で終端短絡したとき、磁界プローブを図のように配置して、線路に沿って測定したものである。



(a)

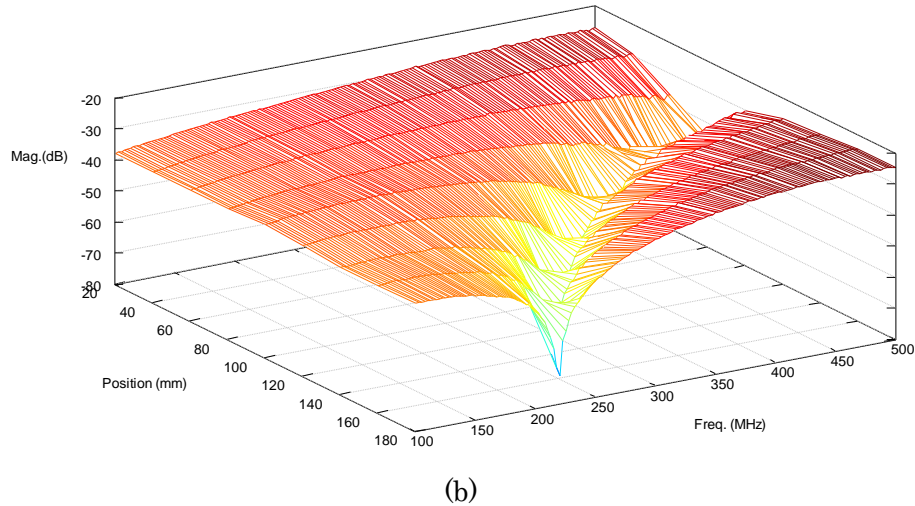


図 5.1 短絡線路の電流定在波の測定例（基板の右端が position=0, 左端が 200 mm）

図 5.1(a)に示すようにして、電流定在波が磁界プローブの位置によって変化することを観測せよ。（これは実験 3 の拡張である。）

5.2 縦続行列表示

電信方程式の解表現として縦続行列表示の解がよく用いられている（附録 5 参照）。この表現は

$$\begin{bmatrix} V_x \\ I_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta x & -jZ_0 \sin \beta x \\ -j(1/Z_0) \sin \beta x & \cos \beta x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0 \\ I_0 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

この逆表現は、

$$\begin{bmatrix} V_0 \\ I_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta x & jZ_0 \sin \beta x \\ j(1/Z_0) \sin \beta x & \cos \beta x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ I_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(x) & B(x) \\ C(x) & D(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ I_x \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

となる。これが伝送線路の縦続行列(ABCD 行列)である。

5.3 損失のある線路

伝送線路における損失は、導体の抵抗損と媒質の誘電体損である。伝送線路の直列インピーダンスは線路抵抗と線路インダクタンスの直列回路で、伝送線路の並列アドミタンスが誘電体損を意味するコンダクタンスとキャパシタンスとの並列回路で与えることによって、電信方程式は

$$-\frac{dV(x)}{dx} = ZI(x) = (R + j\omega L)I(x) \quad , \quad -\frac{dI(x)}{dx} = YV(x) = (G + j\omega C)V(x) \quad (5.15)$$

と表現することができる。このとき、波動方程式は

$$\frac{d^2 V(x)}{dx^2} + ZY \cdot V(x) = 0 \quad , \quad \frac{d^2 I(x)}{dx^2} + YZ \cdot I(x) = 0 \quad (5.16)$$

であり、この一般解は線路電圧に関して、

$$V(x) = K_1 e^{-\gamma x} + K_2 e^{\gamma x} \quad (5.17)$$

の形式となる。ここで γ は複素数として

$$\gamma = \sqrt{ZY} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \equiv \alpha + j\beta \quad (5.18)$$

で定義される。複素数で与えられた γ を**伝搬定数**(propagation constant)と呼ぶ。この実部 α は**減衰定数**(attenuation constant)、虚部 β は**位相定数**である。このとき、特性インピーダンス Z_0 は、

$$Z_0 = Z / \gamma = (R + j\omega L) / \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \sqrt{(R + j\omega L) / (G + j\omega C)} \quad (5.19)$$

と複素数になる。

$R \ll \omega L$ および $G \ll \omega C$ が近似できると

高周波で使用される伝送線路では、導体抵抗は小さく、また誘電体損も小さいものが使用されている。このとき、特性インピーダンス Z_0 は、

$$Z_0 = \sqrt{(R + j\omega L) / (G + j\omega C)} \cong \sqrt{L / C} \quad (5.20)$$

と近似できる。

伝搬定数は、 $Y_0 = 1/Z_0$ (特性アドミッタンス)として、

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{Z}{Z_0} + \frac{Y_0}{Y} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{R + j\omega L}{Z_0} + \frac{G + j\omega C}{Y_0} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{R}{Z_0} + \frac{G}{Y_0} \right) + j \left(\frac{\omega L}{Z_0} + \frac{\omega C}{Y_0} \right) \right\} \\ &\approx \frac{1}{2} \left(\frac{R}{Z_0} + \frac{G}{Y_0} \right) + j\omega\sqrt{LC} \end{aligned} \quad (5.21)$$

と近似できる。この結果、減衰定数は、

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{Z_0} + \frac{G}{Y_0} \right) \quad (5.22)$$

で与えられることになる。

損失のある伝送線路の縦続行列表示は伝搬定数 γ を用いて

$$\begin{bmatrix} A(x) & B(x) \\ C(x) & D(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \gamma x & Z_0 \sinh \gamma x \\ (1/Z_0) \sinh \gamma x & \cosh \gamma x \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

となる。

高周波における抵抗は、直流の場合と異なるので、高周波抵抗 R_f と呼ばれたりしている。これは導体が有限な導電率を有するためである。有限な導電率を有するとき、高周波においては『**表皮効果**(skin effect)』と呼ばれる現象が発生する。この現象は有限な導電率を持つ導体に電流が流れるとき、電流は表面の浅い部分に偏って流れる現象である。このため高周波電流の流れる領域は小さくなり、実効的な抵抗(実効抵抗)は、直流の場合に比べて大きくなる。電流が導体表面から浸透できる等価的な深さ δ_c を**表皮の深さ**(skin depth)とか浸透の深さ(penetration depth)という。導電率 σ の導体(透磁率を μ_0 とする)での表皮の深さは

$$\delta_c = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma}} \quad (5.24)$$

で与えられ、この深さの領域だけを高周波電流が流れる実効的な抵抗が抵抗損となる。誘電体による損

失は、誘電体損失角 $\tan \delta$ が与えられると、コンダクタンスは $G = \omega C \tan \delta$ となる。

実験 4：終端開放および短絡時の伝送線路の入力インピーダンス

実験 3.4 に用いたマイクロストリップ線路を使用し、出力端子を、開放および短絡にしたときの入力インピーダンスを求めよ。

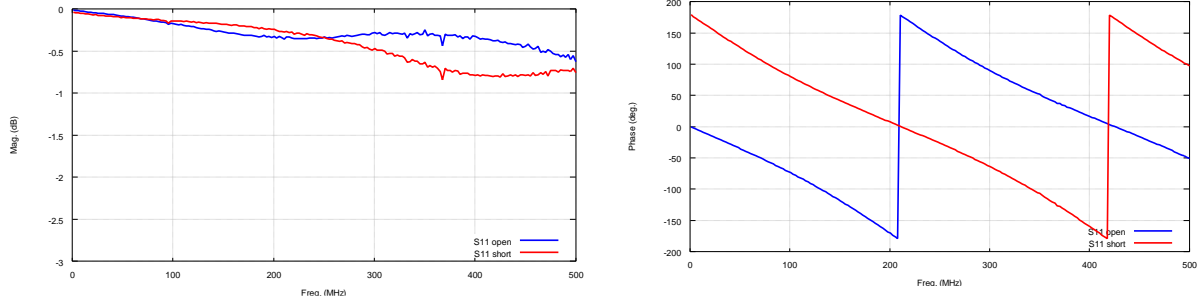


図 5.2 終端開放線路と短絡線路での S11 特性例

問 4.1：開放と短絡にしたときの違いは何であるか。

回路論では、伝送線路の入力インピーダンス Z_{in} は次のようにして求める。伝送線路の特性インピーダンスを Z_0 、負荷インピーダンスを Z_L とするとき、(5.23)式で与えた縦続行列を用いた回路方程式に端子条件 $V(l) = Z_L I(l)$ を与えて

$$Z_{in} = \frac{Z_L \cosh \gamma l + Z_0 \sinh \gamma l}{(Z_L / Z_0) \sinh \gamma l + \cosh \gamma l} \quad (5.25)$$

となる。負荷が開放のときは $Z_L \rightarrow \infty$ であるので、

$$Z_{in}|_{Z_L \rightarrow \infty} = Z_{fre} = Z_0 \frac{\cosh \gamma l}{\sinh \gamma l} = Z_0 \coth \gamma l, \quad \text{無損失のときは} \quad Z_{fre} = -jZ_0 \cot \beta l \quad (5.26)$$

短絡のときは、 $Z_L = 0$ であるので、

$$Z_{in}|_{Z_L = 0} = Z_{sh} = Z_0 \frac{\sinh \gamma l}{\cosh \gamma l} = Z_0 \tanh \gamma l, \quad \text{無損失のときは} \quad Z_{sh} = jZ_0 \tan \beta l \quad (5.27)$$

となる。

S 行列では、入力インピーダンスと入力端子での反射係数

$$\Gamma_{in} = \frac{Z_{in} - Z_S}{Z_{in} + Z_S} \quad (5.28)$$

が s_{11} であるので、 s_{11} から入力インピーダンス Z_{in} を求めると、

$$Z_{in} = \frac{1 + S_{11}}{1 - S_{11}} Z_S \quad (5.29)$$

となる。

図 5.2 の測定結果から(5.29)式を用いて入力インピーダンスを求めると、

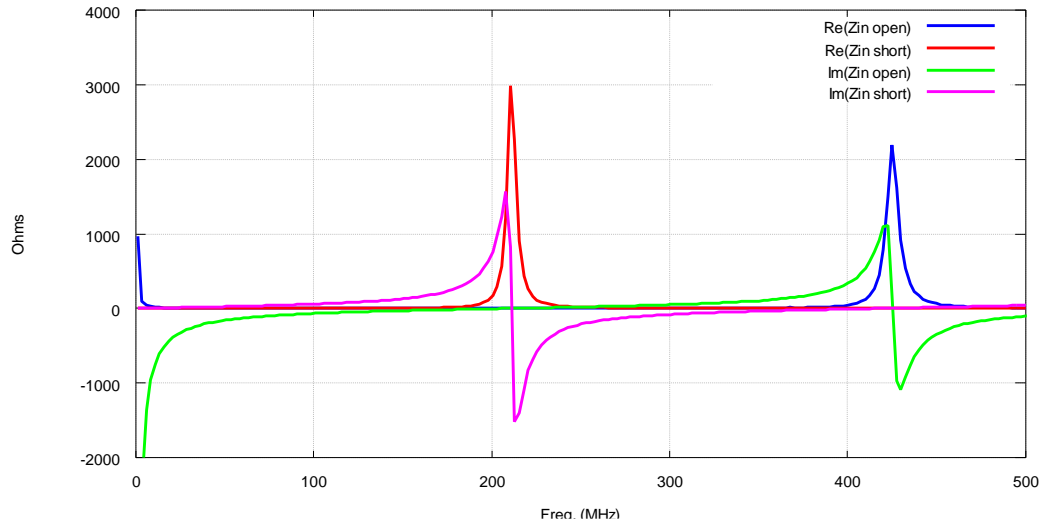


図 5.3 測定結果から求めた入力インピーダンス特性

となる。短絡線路のときは、周波数 209 MHz で共振が発生しており、これは 1/4 波長に対応する周波数である。線路長が 0.2 m であるので、実効誘電率は

$$\lambda_0 = \frac{3 \times 10^8}{209 \times 10^6} = 1.435 \text{ (m)}, \quad \lambda = 0.2 \times 4 = 0.8 \text{ (m)}, \quad \Rightarrow \quad \epsilon_{eff} = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} \right)^2 = \left(\frac{1.435}{0.8} \right)^2 = (1.79)^2 = 3.2$$

となることが予測できる。

問 4.2：この伝送線路の特性インピーダンスと伝搬定数を求めよ。

開放終端と短絡終端の伝送線路の入力インピーダンスは (5.26) 式および (5.27) 式と (5.29) 式から

$$Z_{fre} = Z_0 \coth \gamma l = \frac{1 + S_{11}(open)}{1 - S_{11}(open)} Z_s, \quad Z_{sh} = Z_0 \tanh \gamma l = \frac{1 + S_{11}(short)}{1 - S_{11}(short)} Z_s \quad (5.30)$$

であるので、特性インピーダンス Z_0 および伝搬定数 γ は $Z_s = 50 \Omega$ として、

$$Z_0 = \sqrt{Z_{fre} Z_{sh}} = 50 \sqrt{\frac{1 + S_{11}(open)}{1 - S_{11}(open)} \cdot \frac{1 + S_{11}(short)}{1 - S_{11}(short)}} \quad (5.31)$$

$$\gamma = \alpha + j\beta = \frac{1}{l} \tanh^{-1} \sqrt{\frac{Z_{sh}}{Z_{fre}}} = \frac{1}{l} \tanh^{-1} \sqrt{\frac{1 + S_{11}(short)}{1 - S_{11}(short)} \cdot \frac{1 - S_{11}(open)}{1 + S_{11}(open)}} \quad (5.32)$$

と求められる。伝搬定数の虚部が位相定数であり、実効誘電率は次のようになる：

$$\beta = \frac{\omega}{v} = \frac{\sqrt{\epsilon_{eff}}}{v_0} \omega = \sqrt{\epsilon_{eff}} \frac{2\pi}{\lambda_0} \quad \Rightarrow \quad \epsilon_{eff} = \left(\frac{v_0}{\omega} \beta \right)^2 \quad (5.33)$$

(5.31)式から、特性インピーダンスを求めると、図 5.4 のようになる。共振帯域外の結果から、特性インピーダンスは約 63 Ω と評価できる。

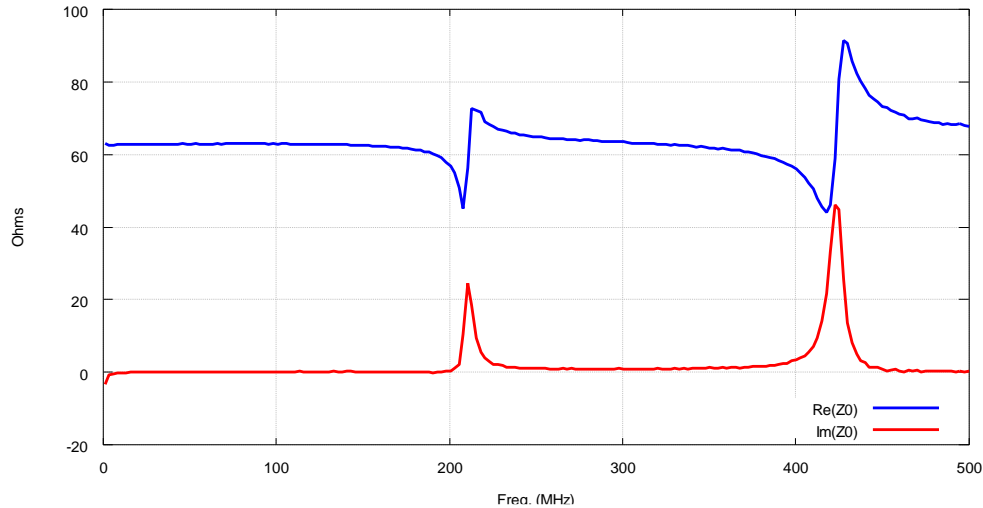


図 5.4 測定結果から求めた特性インピーダンス

どちらかの入力インピーダンスが共振している周波数付近では、特性インピーダンスには虚部も発生し、実部も大きく変動している結果となっている。(注：この結果は、図 5.2 右図の位相をアンラッピングしても正弦波関数の値は変化しないので、特性インピーダンスは変化しない。)

(5.32)式から評価した伝搬定数は、図 5.5 のようになる。

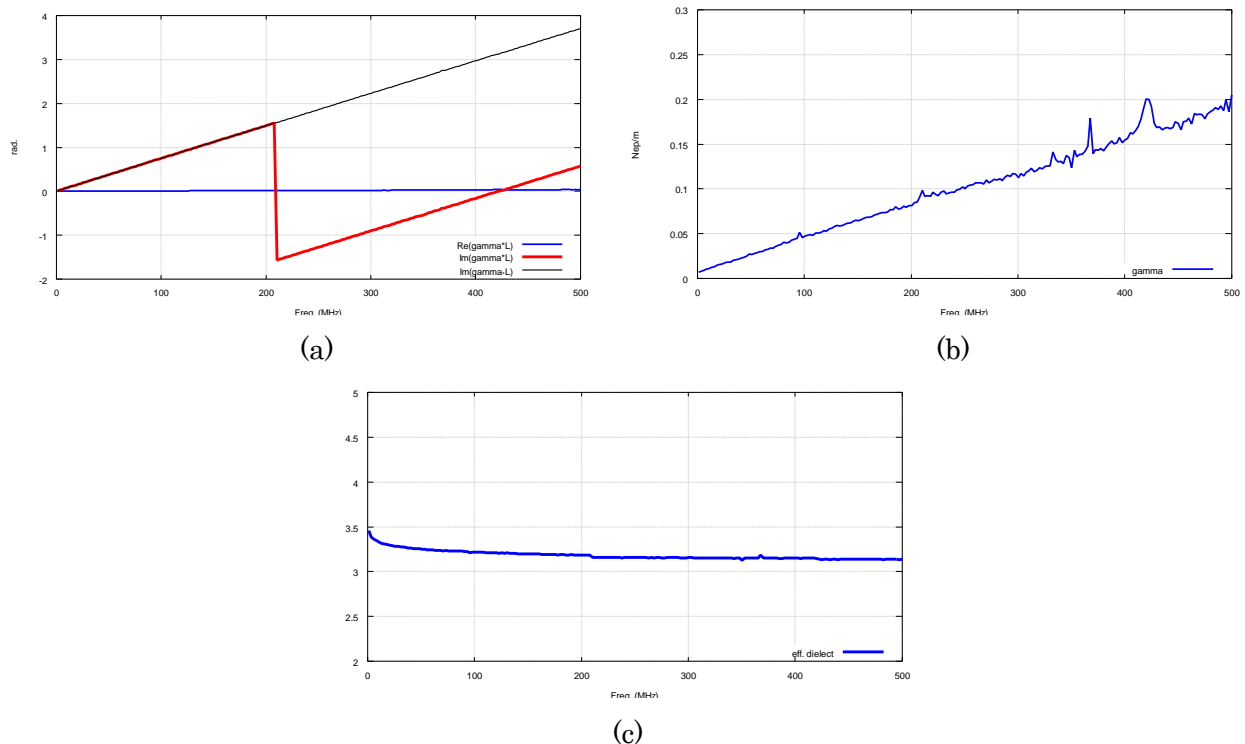


図 5.5 アンラッピングした位相定数成分(a)と減衰定数(b)および実効誘電率(c)

伝搬定数の虚部（位相定数）が、折り返された(wrapping)結果 ((a)の赤線) の線になっている。これをアンラッピングして連続関数になるようにすると黒線で示すようになる。減衰定数は(b)図のようになる。求めた位相定数を用いて実効誘電率を求めると、下段の(c)図となり予測値とほぼ一致する。

実験 5：縦続行列の要素から特性インピーダンスと実効誘電率を求める



図 5.6 測定対象とするマイクロストリップ線路（長さ 200 mm、線幅約 2 mm）

伝送線路の縦続行列要素を用いて特性インピーダンスと伝搬定数を決定するためには、まず S 行列からインピーダンス行列は $Z_S = 50 \Omega$ として、

$$\mathbf{Z} = 50\mathbf{z} = 50\{\mathbf{U} + \mathbf{S}\}\{\mathbf{U} - \mathbf{S}\}^{-1} \quad (5.34)$$

と求められ、インピーダンス行列と縦続行列の関係が

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11}Z_{21}^{-1} & Z_{11}Z_{21}^{-1}Z_{22} - Z_{12} \\ Z_{21}^{-1} & Z_{21}^{-1}Z_{22} \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

であることから、縦続行列の各要素が求まる。伝送線路の縦続行列は、

$$\begin{bmatrix} A(x) & B(x) \\ C(x) & D(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \gamma x & Z_0 \sinh \gamma x \\ (1/Z_0) \sinh \gamma x & \cosh \gamma x \end{bmatrix}$$

である。この要素から特性インピーダンスと伝搬定数を求めるには、線路長 l の縦続行列要素が与えられると、

$$Z_0 = \sqrt{\frac{AB}{CD}}, \quad \tanh \gamma l = \sqrt{\frac{BC}{AD}} \Rightarrow \gamma = \alpha + j\beta = \frac{1}{l} \tanh^{-1} \sqrt{\frac{BC}{AD}}. \quad (5.36)$$

したがって、実効誘電率は位相定数から

$$\beta = \frac{\omega}{v} = \frac{\sqrt{\epsilon_{eff}}}{v_0} \omega = \sqrt{\epsilon_{eff}} \frac{2\pi}{\lambda_0} \Rightarrow \epsilon_{eff} = \left(\frac{v_0}{\omega} \beta \right)^2 \quad (5.37)$$

と決定できる。

さて、実験 3.4 において、伝送線路の散乱行列を測定した。その詳細な特性には言及しなかった。ここで、基本的な特性を把握するために無損失の伝送線路を考える。縦続行列は電気角を $\theta = \beta l$ として

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & jZ_0 \sin \theta \\ jY_0 \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \Rightarrow (3.27) \text{式から} \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} -jZ_0 \cos \theta / \sin \theta & -jZ_0 / \sin \theta \\ -jZ_0 / \sin \theta & -jZ_0 \cos \theta / \sin \theta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{S} = (\mathbf{Z} - 50\mathbf{U})(\mathbf{Z} + 50\mathbf{U})^{-1}$$

として、特性インピーダンスを変化させたときの S 行列の各要素の周波数特性を求めると、次のようになる。（位相特性は省略）

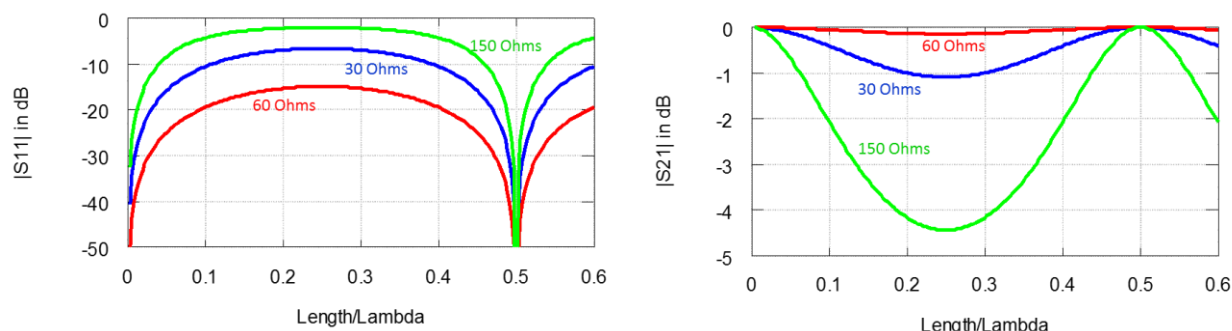


図 5.7 特性インピーダンスを変化したときの特性（青 30 Ω 、赤 60 Ω 、緑 150 Ω ）

これから特性インピーダンスに関係なく、線路長が 1/2 波長（一般的には 0.5, 1.0, 1.5, ... の波長）のとき反射係数は最小になり、透過係数は最大になる。伝送線路の特性は周波数によって繰り返す性質があることを考慮すると、線路長が 1/4 波長（一般的には 1/4, 3/4, 5/4... の波長）のときに反射係数は最大で、透過係数は最小になる。当然ながら、特性インピーダンスが 50 Ω に近いほど反射係数は小さく、透過係数は大きくなる。図 5.8 は、線路長が 1/4 波長での S_{11} (dB) と特性インピーダンスの関係を示すグラフである。ここで、特性インピーダンスは $Z_0 = \sqrt{L/C}$ であるので、50 Ω より大きいときは L が、小さいときは C が、 $Z_0 = 50 \Omega$ のときより大きくなるので、それぞれ誘導性(inductive)、容量性(capacitive)線路と称する。

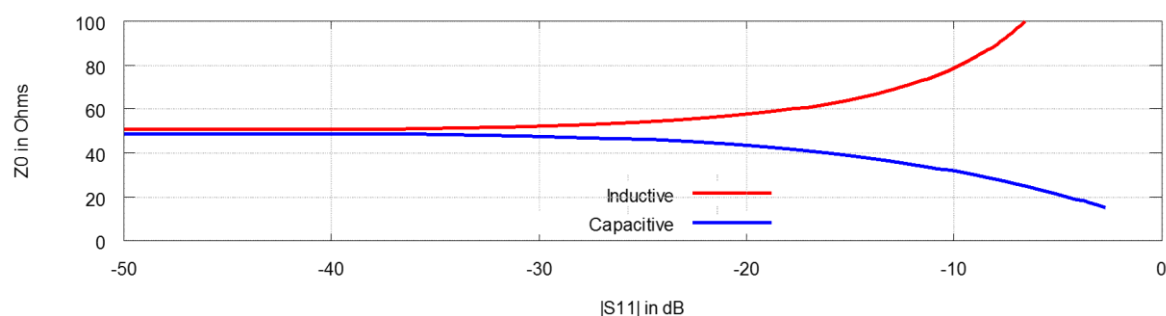


図 5.8 1/4 波長での S_{11} (dB) と特性インピーダンスの関係

図 5.6 の伝送線路を測定した S 行列の結果は、次である。

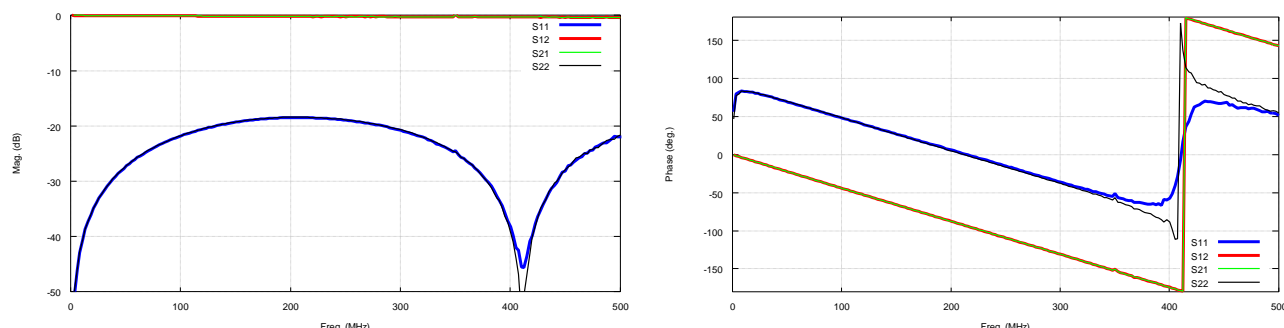


図 5.9 測定された S 行列の要素

この結果は、410 MHz ($\lambda \approx 73$ cm) 付近が 1/2 波長に対応している。線路長は 20 cm であるので、

$$\varepsilon_{eff} = \sqrt{\frac{73}{2 \times 20}} \approx 3.3$$

と予測できる。また、 S_{11} 特性の最大値が約 -20 dB ということは、特性インピーダンスは $50 \sim 60 \Omega$ 程度であることが、図 5.8 と図 5.9 から判断できる。

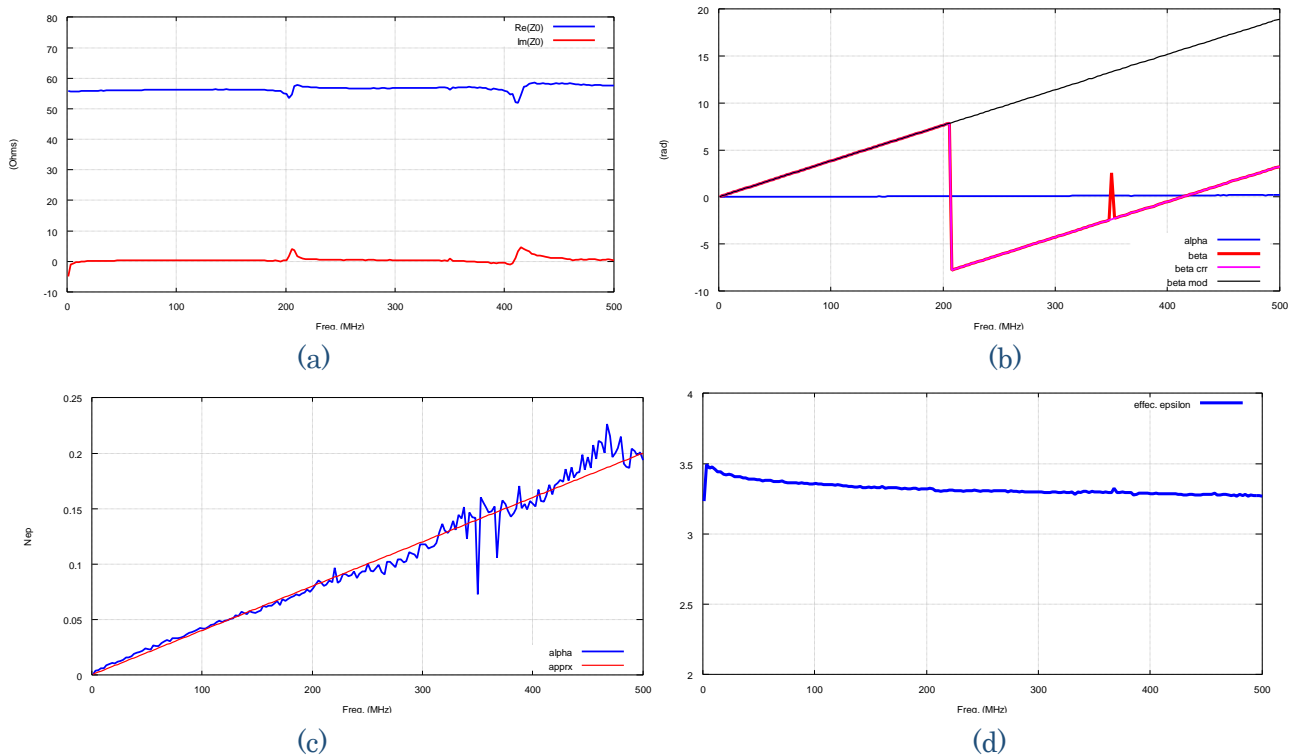


図 5.10 求められた特性インピーダンス(a)と位相定数(b)および減衰定数(c)と実効誘電率(d)

この結果からは、特性インピーダンスは約 55Ω 、減衰定数が $0.0004 f_{(\text{MHz})}$ 、実効誘電率が約 3.3 と評価できる。

{6. クロストークの原理

現在の電気電子機器においては、単一の伝送線路で構成されていることは少なく、非常に多くの伝送線路が接近して配置されたりしている。その基本は平行な 2 本の伝送線路である。次の図(写真)で示すものは伝送線路の近傍に伝送線路（一般には導体）が存在するモデルである。一方の伝送線路の透過係数を、他方の伝送線路の両終端を 50Ω で終端したとき、開放端にしたとき、短絡端にしたとき、および開放端と短絡端にしたときとでは、どのようになるかを調べると、位相は省略して大きさだけを示すと図 6.2 のような結果となる。



図 6.1 伝送線路に近接する他の伝送線路（図は近接線路の左端が開放、右端が短絡されたモデル）

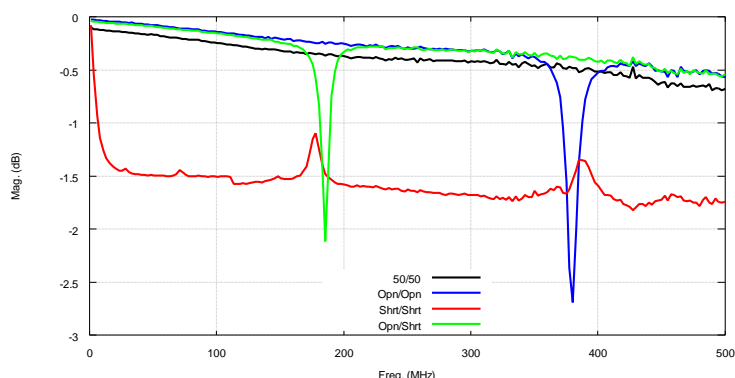


図 6.2 近接線路の終端条件により変化する透過特性

近接する線路の条件によって「なぜこのような現象が発生するのか」、が問題となる。これを考える。

グラウンド面上に 2 本の平行な導体線があるときを考える。1 本の線路の場合のように線路電流や線路電圧がどのような電磁気学的現象から成立しているかを考える。この現象は次図に示すように電界結合と磁界結合と呼ばれる現象である。

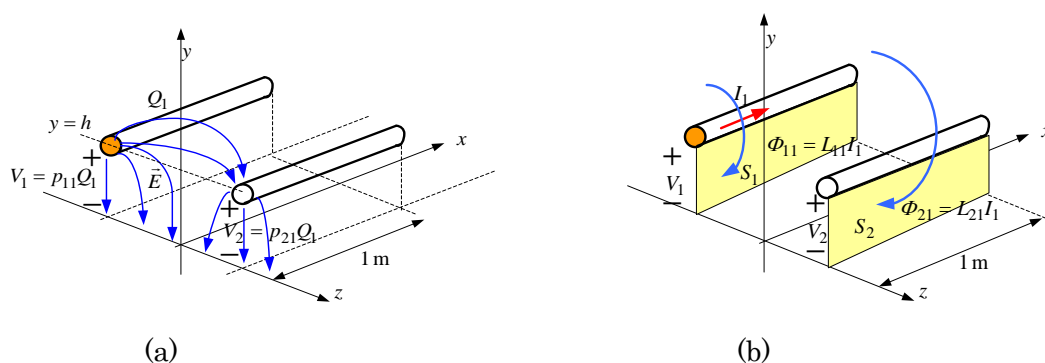


図 6.3 2 本線路系の電界結合(a)と磁界結合(b)

6.1 電界結合と C(容量性)結合

図 6.3(a)に示す模式図において、左側の導体線に単位長当たり電荷 Q_1 を与えたとき、電荷が作る電界を線積分すると電圧 V_1 が発生する。他方の導体線にも Q_1 による電界が作用し、電圧 V_2 が発生する。右側の導体線に単位長当たり電荷 Q_2 を与えたときも同じ現象が発生する。この現象は電磁気学的には導体の電位（電圧）と導体に与えた電荷の関係として次式で与えられる：

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

ここで、 p_{ij} は電位係数であり、この逆表示をとると

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

として表現される。ここで、 c_{ii} は容量係数、 C_{ij} は誘導係数である。

今、与えた電荷が時間変化するときを考えると、電流は電荷の時間変化と定義されるので、

$$I = \frac{dQ(t)}{dt} \quad (6.3)$$

と表現でき、時間変化する電荷を与えることは電流を与えることになる。与えた電荷が正弦波状に変化するとき、フェーザ法での表記は

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

となる。

電磁気学的な表現で与えたこの式の係数行列は、導体がグラウンド面に対してもつ自己キャパシタンス、導体間の相互キャパシタンスではないことに注意が必要である。これを次に示す。図 6.3 において、正弦波状に時間変化する電荷を与えることを考える。図 6.3 の導体断面が回路網の節点に対応し、導体がグラウンド面にもつキャパシタンスと導体間にキャパシタンスが存在している。これを回路論的に表現すると図 6.4 のようになる。

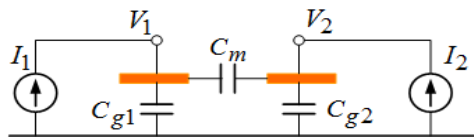


図 6.4 自己および相互キャパシタンスで表現する回路網

導体がグラウンド面に持つキャパシタンスを C_{g1} および C_{g2} とし、導体間の相互キャパシタンスを C_m とする。それぞれの節点に電流源 I_1 と I_2 が印加されているとし、節点電圧が V_1 および V_2 となる回路網になる。この節点方程式は、

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} C_{g1} + C_m & -C_m \\ -C_m & C_{g2} + C_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

と書ける。これを(6.4)式と比較すると

$$C_{11} = C_{g1} + C_m, \quad C_{22} = C_{g2} + C_m, \quad C_{12} = C_{21} = -C_m \quad (6.6)$$

または、

$$C_{g1} = C_{11} + C_{12}, \quad C_{g2} = C_{22} + C_{21} \quad (6.7)$$

となる。このようにキャパシタンス行列の要素がそのまま自己および相互キャパシタンスではない。

(6.5)式から I_2 を取り上げ、変形すると、

$$I_2 = j\omega C_{g2} V_2 + j\omega C_m (V_2 - V_1) \quad (6.8)$$

となる。この右辺の第 2 項は、導体間に電位差があれば、相互キャパシタンスを介して妨害電流が導体 2 側に流れることを意味している。この現象は電磁気学的に見れば電界が作用することによって発生する**変位電流**であり、これが『**電界結合**』である。回路論的に見れば『**容量性結合**』になる。また、等価回路では『**等価電流源**』で表現されることになる。

6.2 磁界結合と M(誘導性)結合

簡単のために、図 6.3(b)に示す模式図において、左側の導体線に電流 I_1 が流れると導体線近傍に磁界が発生する。左側自体の曲面 S_1 を鎖交する磁束 Φ_{11} と隣接線での曲面 S_2 を鎖交している磁束 Φ_{21} との関係は

$$\Phi_{11} = \int_{S_1} \vec{B}_1 \cdot \vec{n} dS = L_{11} I_1, \quad \Phi_{21} = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot \vec{n} dS = L_{21} I_1 \quad (6.9)$$

として自己インダクタンス L_{11} と相互インダクタンス L_{21} が定義される。流れる電流が時間変化すると、鎖交磁束も時間変化することになるので、 S を囲む閉回路には逆起電力が発生する。(注：図 6.3(b)においては S を囲む長方形の周辺が閉回路となる)

この現象は Faraday の誘導則であり、右側の導体線に電流が流れても同様な現象になる。この現象は正弦波電流のとき、重ね合わせをおこなってフェーザ法で表現すると、

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

となる。この表現は、電気回路では相互誘導回路である。この式の第 2 行を取りだすと、

$$V_2 = j\omega L_{22} I_2 + j\omega L_{21} I_1 \quad (6.11)$$

と書ける。この右辺第 2 項の表現は、他の回路に流れた電流が作る磁界が被害側の閉回路を鎖交することによって妨害電圧が発生することを意味している。相互インダクタンスは

$$L_{21} = \frac{1}{I_1} \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot \vec{n} dS \quad (6.12)$$

で定義されるので、閉回路の面積(ここで S_2 は)が小さい方が結合(妨害)は小さくなる。この現象は電磁気学的には『**磁界結合**』であり、回路的には相互インダクタンスによって妨害を受けることになるので、『**誘導性結合**』という。また、(6.11)式の右辺第 2 項は電圧の次元であることから、この妨害は『**等価電圧源**』として働くことを意味している。

この節の冒頭の現象を把握するために、次の実験をおこなう。

実験 6: 電界結合と磁界結合の基本モデル実験

以下に示す一部(40 mm)が並走する 2 本の線路系を考える。

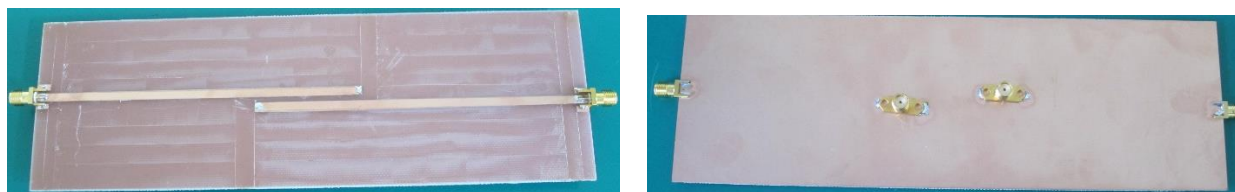


図 6.5 一部が並走する平行 2 本線路の表面と裏面（裏面には SMA コネクタが装着）

実験 6.1: それぞれの線路の終端を開放および短絡したときの S_{21} 特性を比較せよ。（開放の場合はコネクタには何も付けず、短絡の場合は短絡終端器を接続する。）

また、一方を開放、他方を短絡したときの S_{21} 特性とも比較し考察せよ。

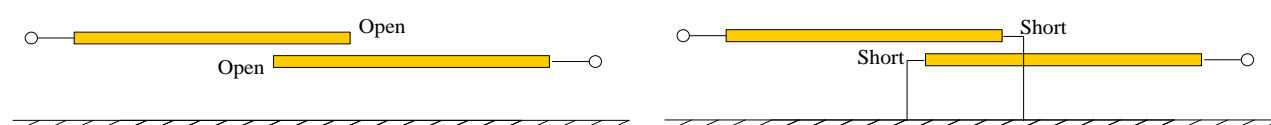


図 6.6 開放と短絡のときの回路図

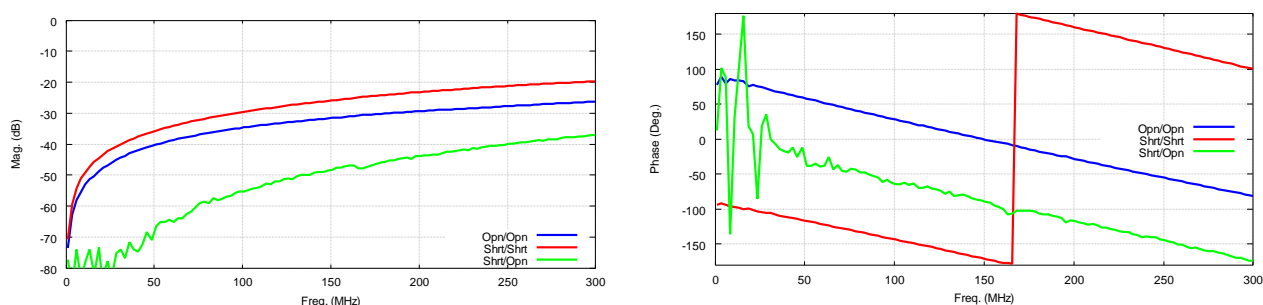


図 6.7 測定した S_{21} 特性：青線は開放/開放、赤線は短絡/短絡、緑の線は短絡/開放のとき

この結果は開放/開放の組合せの場合と短絡/短絡の組合せのときには結合レベルが大きいことを示しており、開放/短絡の組み合わせでは小さいことを示している。

実験 6.2: 写真に示した位置の磁界プローブで受信するレベルを短絡/短絡のときと開放/開放のときとで比較せよ。

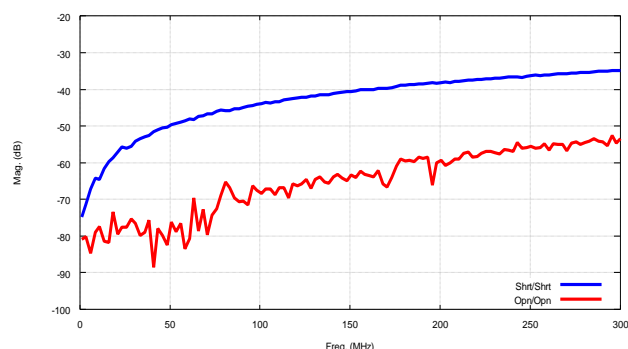


図 6.8 磁界プローブの位置とプローブで測定された受信レベル

図 6.8 の左図に示す磁界プローブの受信レベルは端末コネクタを短絡/短絡にしたときの方が開放/開放にしたときより 20～30 dB 大きい。

問 6. このモデル実験は、電界結合と磁界結合のメカニズムを知るためのものである。それぞれのメカニズムを回路論および電磁波論に基づいて説明せよ。

(1) 低い周波数の励振源が接続された線路の終端を短絡すると、
 短絡部では電圧がゼロに近く、電流が多く流れていることになる。その結果、短絡に近い近接線路が並走している部分には、励振線路終端短絡部分で発生している磁界が作用することになる。即ち、並走している近接線路には、ファラデーの誘導則による電圧の妨害を受けることになる。この現象は、被妨害線路(近接線路)では磁界結合であり、電圧源で表現できる。この結果、次のような等価回路が表現できる。

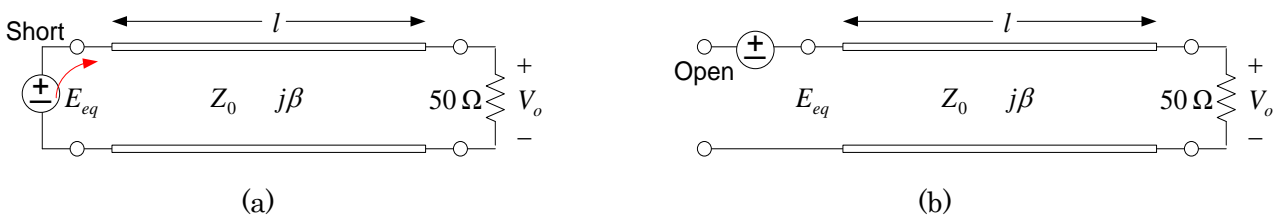


図 6.9 等価電圧源による被妨害線路での等価回路：(a)短絡のとき、(b)開放のとき

図 6.9(a)に示すように、近接線路の端子が短絡のときは他端の負荷回路に電流を流し、誘導電圧が観測される。(b)の開放の場合は、等価電圧源が働かないので、誘導電圧は観測されない。

(2) 励振源が接続された線路の終端を開放にすると、
 励振線の終端開放部には低周波では電流が流れず電圧が主流になること、即ち電界が主に発生していることになるので、近接線路には電界結合による変位電流が誘導されることになる。この現象は近接線路では電流源として表現できることになる。この結果、等価回路は次となる。

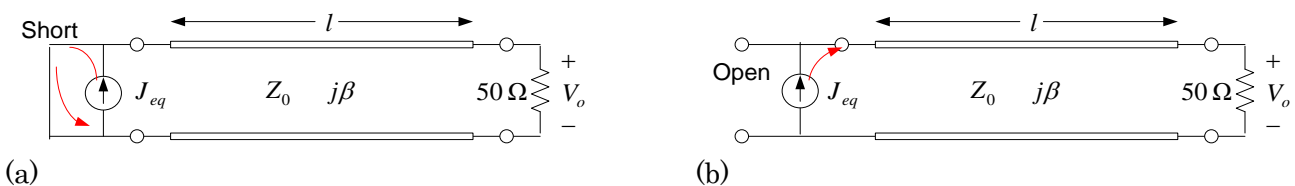


図 6.10 等価電流源による被妨害線路での等価回路：(a)短絡のとき、(b)開放のとき

図 6.10(a)に示すように、近接線路の端子が短絡されていると、等価電流源の電流は全て短絡端子に流れるので、他端子の負荷には電流は流れず誘導電圧は発生しない。これに対し(b)のように開放にされていると等価電流源の電流は並走線路を励振し、他端子の負荷に誘導電圧を生じることになる。

参考実験：50Ωで終端したとき：

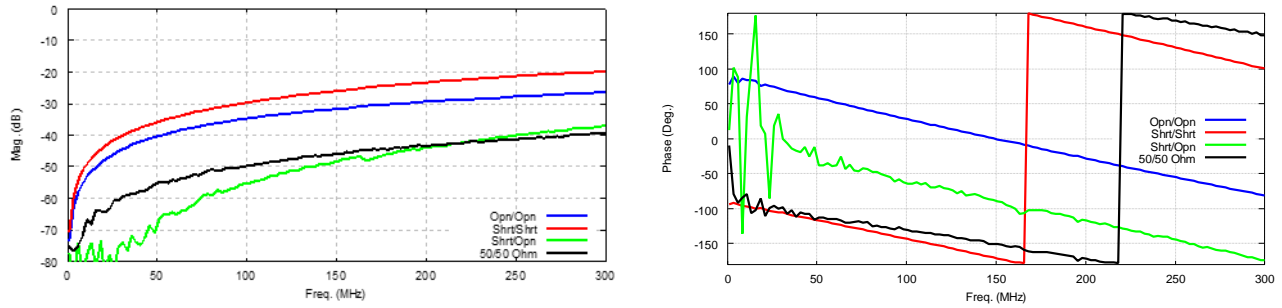


図 6.11 端子条件の違いによる S_{21} (透過) 特性

7. 多線条線路の解析

グラウンド面上の n 本の導体線路が一定の高さで平行に配置された線路系を考える。ここでは $n=2$ の場合を取り上げる。この系はマイクロ波回路の分野においては結合 2 本線路と称されている。

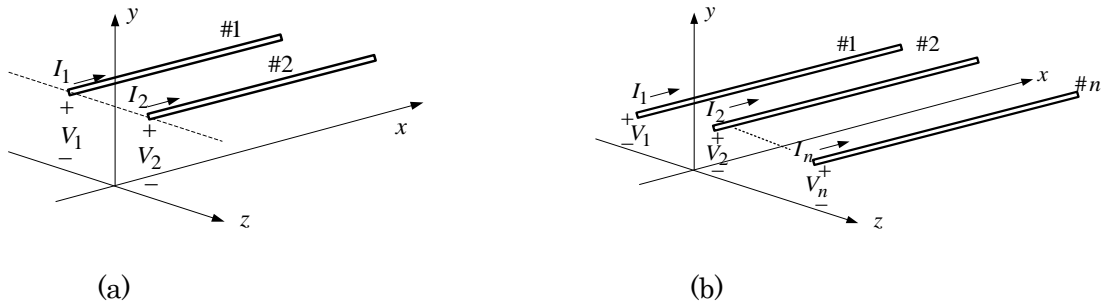


図 7.1 グラウンド面上の 2 本線路(a)と n 本線条線路(b)

7.1 電信方程式

グラウンド面上の 2 導体での磁界結合を線路方向での電圧変化分として評価すると、

$$-\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \Rightarrow -\frac{d\mathbf{V}}{dx} = j\omega \mathbf{L}\mathbf{I} \quad (7.1)$$

と表現できる。同様に電界結合では、線路方向に流れる電流の減少率として表現することができ、

$$-\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \Rightarrow -\frac{d\mathbf{I}}{dx} = j\omega \mathbf{C}\mathbf{V} \quad (7.2)$$

となる。インダクタンスおよびキャパシタンス行列は相反定理が成立するので、 $L_{ij} = L_{ji}$ および $C_{ij} = C_{ji}$ である。また、 $\mathbf{V} = [V_1, V_2]^T$ は電圧ベクトル、 $\mathbf{I} = [I_1, I_2]^T$ は電流ベクトルと呼ぶ。

7.2 モード分解による解法

モード分解法とは、実際の電圧と電流（実電圧と実電流）を独立直交な仮想的な電圧と電流（モード電圧、モード電流）に分解し、モード電圧とモード電流に関する電信方程式を 1 本の線路の場合と同様に解き、求まったモード成分での解を実電圧と実電流に再変換して電信方程式の解として求める手法である。

平行な対称 2 本線路における代表的な独立直交モード系として、**EMC の分野ではディファレンシャルモード (DM) (電圧、電流は下部添え字 dm で表現) とコモンモード (CM) (電圧、電流は下部添え字 cm で表現) が代表的である。**

実電圧、実電流とモード電圧、モード電流の関係をそれぞれ次の変換行列を用いて与えている。

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{dm} \\ V_{cm} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{dm} \\ I_{cm} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{V} = \mathbf{T}_v \mathbf{V}_m, \quad \mathbf{I} = \mathbf{T}_i \mathbf{I}_m \quad (7.3)$$

この逆は

$$\begin{bmatrix} V_{dm} \\ V_{cm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I_{dm} \\ I_{cm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{V}_m = \mathbf{T}_v^{-1} \mathbf{V}, \quad \mathbf{I}_m = \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{I} \quad (7.4)$$

である。このモードは次のような励振法で作ることができる。

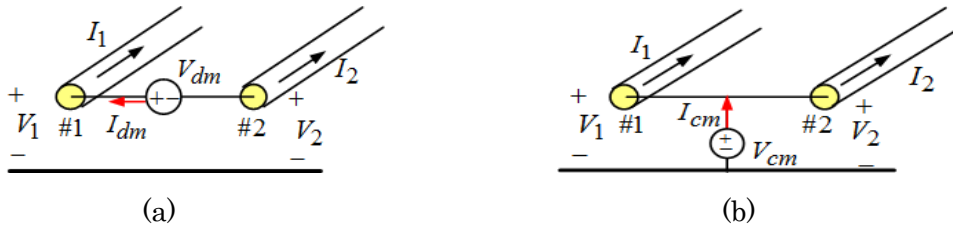


図 7.2 ディファレンシャルモード(a)とコモンモード(b)の励振法

また、PCB におけるマイクロストリップ線路構造での DM と CM 励振時の電気力線を模式化した図を図 7.3 に示す。DM では、パターン線路の真ん中が零電位の電気壁(electric wall)となり、CM では磁気壁(magnetic wall)となる。この DM 励振は等振幅で逆相の差動信号の伝送に使用されている方式でもある。

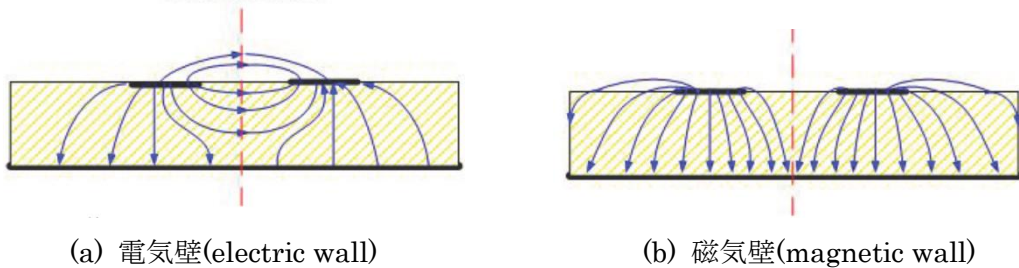


図 7.3 電気力線の模式図：ディファレンシャルモード(a)とコモンモード(b)

2 本線路の場合の電信方程式の第 1 式をモード成分に分解すると、

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} &= j\omega \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \Rightarrow -\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} V_{dm} \\ V_{cm} \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{dm} \\ I_{cm} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow -\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} V_{dm} \\ V_{cm} \end{bmatrix} &= j\omega \begin{bmatrix} L_{11} + L_{22} - 2L_{12} & (L_{11} - L_{22})/2 \\ (L_{11} - L_{22})/2 & (L_{11} + L_{22} + 2L_{12})/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{dm} \\ I_{cm} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.5)$$

となる。同様に第 2 式は

$$-\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} I_{dm} \\ I_{cm} \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} (C_{11} + C_{22} - 2C_{12})/4 & (C_{11} - C_{22})/2 \\ (C_{11} - C_{22})/2 & C_{11} + C_{22} + 2C_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{dm} \\ V_{cm} \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

上記におけるモード分解した電信方程式は線路系が対称な場合、すなわち $L_{11} = L_{22}$ および $C_{11} = C_{22}$ が成

立する構造のとき、即ち右辺の係数行列の**非対角要素が零であるときのみ DM と CM は独立な直交モード**となる。

対称形であるとすれば、モードインダクタンス行列とモードキャパシタンス行列は、

$$\mathbf{L}_m = \begin{bmatrix} L_{dm} & 0 \\ 0 & L_{cm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(L_{11} - L_{12}) & 0 \\ 0 & (L_{11} + L_{12})/2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_m = \begin{bmatrix} C_{dm} & 0 \\ 0 & C_{cm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (C_{11} - C_{12})/2 & 0 \\ 0 & 2(C_{11} + C_{12}) \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

であり、モード特性インピーダンス行列は

$$\mathbf{Z}_{0m} = \begin{bmatrix} Z_{0dm} & 0 \\ 0 & Z_{0cm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{(L_{11} - L_{12})/(C_{11} - C_{12})} & 0 \\ 0 & \sqrt{(L_{11} + L_{12})/(C_{11} + C_{12})}/2 \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

となる。モード電圧、モード電流に関する解は $k = dm, cm$ として 1 本線の場合と同様に縦続行列形式で

$$\begin{bmatrix} V_k(0) \\ I_k(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta_k x & jZ_{0k} \sin \beta_k x \\ j(1/Z_{0k}) \sin \beta_k x & \cos \beta_k x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_k(x) \\ I_k(x) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_k(x) \\ I_k(x) \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

となる。

求まったモード電圧とモード電流を実電圧、実電流に変換した結果は次のようになる。(附録 6 参照)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{V}(0) \\ \mathbf{I}(0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{T}_v & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{T}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_m(0) \\ \mathbf{I}_m(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_v & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{T}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_m & \mathbf{B}_m \\ \mathbf{C}_m & \mathbf{D}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_m(l) \\ \mathbf{I}_m(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_v & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{T}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_m & \mathbf{B}_m \\ \mathbf{C}_m & \mathbf{D}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_v^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{T}_i^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}(l) \\ \mathbf{I}(l) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{T}_v \mathbf{A}_m \mathbf{T}_v^{-1} & \mathbf{T}_v \mathbf{B}_m \mathbf{T}_i^{-1} \\ \mathbf{T}_i \mathbf{C}_m \mathbf{T}_v^{-1} & \mathbf{T}_i \mathbf{D}_m \mathbf{T}_i^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}(l) \\ \mathbf{I}(l) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.10)$$

となる。この行列のうち要素 **A** と **B** を書き下すと

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}_v \mathbf{A}_m \mathbf{T}_v^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cos \theta_{cm} + \cos \theta_{dm} & \cos \theta_{cm} - \cos \theta_{dm} \\ \cos \theta_{cm} - \cos \theta_{dm} & \cos \theta_{cm} + \cos \theta_{dm} \end{bmatrix} \quad (7.11)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}_v \mathbf{B}_m \mathbf{T}_i^{-1} = j \begin{bmatrix} Z_{0cm} \sin \theta_{cm} + (Z_{0dm}/4) \sin \theta_{dm} & Z_{0cm} \sin \theta_{cm} - (Z_{0dm}/4) \sin \theta_{dm} \\ Z_{0cm} \sin \theta_{cm} - (Z_{0dm}/4) \sin \theta_{dm} & Z_{0cm} \sin \theta_{cm} + (Z_{0dm}/4) \sin \theta_{dm} \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

であり、 $\mathbf{A}(1,2) = \mathbf{A}(2,1)$ は両モードの伝搬定数が同じであれば零となるが、 $\mathbf{B}(1,2) = \mathbf{B}(2,1)$ は $Z_{0cm} = Z_{0dm}/4$ でない限り零となることはない。伝送線路ではこの条件を満足する構成は不可能である。**これがどのような現象を引き起こすかは後述し、実験でも確かめる。**

7.3 状態変数法

2 線条線路を含む多線条線路系の電信方程式は、数値計算ソフトを用いて数値的に直接解くことが可能となってきた。状態変数法(State variables)は制御系で使用されていた逐次解を求める手法であり、この手法を電信方程式の解法に適用することが可能である。**(注: 1 本の線についてもこの手法で解くができる。)**

電信方程式の行列形式をまとめて

$$-\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{L} \\ \mathbf{C} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{d\mathbf{X}}{dx} + \mathbf{M}\mathbf{X} = \mathbf{O} \quad (7.13)$$

と表現する。この方程式は 1 階同次形微分方程式であるので、この一般解は

$$\mathbf{X}(x) = \exp(-\mathbf{M}x)\mathbf{X}(0) \quad (7.14)$$

と与えられるので、

$$\begin{bmatrix} V(x) \\ I(x) \end{bmatrix} = \exp(-Mx) \begin{bmatrix} V(0) \\ I(0) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V(0) \\ I(0) \end{bmatrix} \quad (7.15)$$

と逆縦続行列が求められる。

注：数値計算ソフトでは縦続行列が $\expm(Mx)$ として直接求めることができる。

7.4 近端クロストークと遠端クロストーク

グラウンド面上の 2 本線路系のひとつの線路の入力ポートを励振（シングルエンド励振）したとき、近接線路との結合現象が発生する。このとき近接する線路の端子には電流電圧が誘導される。これがクロストーク現象である。これを S 行列で評価する。

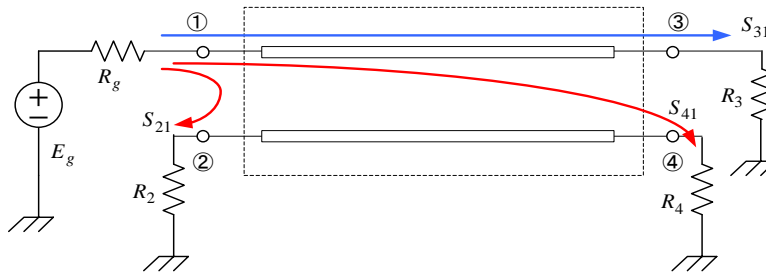


図 7.4 シングルエンド励振時のクロストーク（VNA の測定においては、 $R_g = R_{i(i=2,3,4)} = Z_0 (= 50 \Omega)$ ）
2 本線路での伝送線路での縦続行列が求められ、ABCD の各要素は 2×2 の小行列から構成されている。
既に述べたように、S 行列を求めるためには、インピーダンス行列 Z またはアドミッタンス行列 Y から求める方が便利である。

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \Rightarrow Z = \begin{bmatrix} AC^{-1} & AC^{-1}D - B \\ C^{-1} & C^{-1}D \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} DB^{-1} & -(DB^{-1}A - C) \\ -B^{-1} & B^{-1}A \end{bmatrix} \quad (7.16)$$

と変換すると S 行列は、 $Z_s = 50 \Omega$ として

$$S = (Z - 50U)(Z + 50U)^{-1}, \quad S = (0.02U - Y)(0.02U + Y)^{-1} \quad (7.17)$$

となる。この S 行列の要素において、 s_{21} は①ポートから②ポートへの結合（クロストーク）を意味し、これは近端クロストークと呼ばれる。 s_{31} は①ポートから③ポートへの透過係数を意味し、 s_{41} は①ポートから④ポートへの遠端クロストークである。

S 行列からインピーダンス行列およびアドミッタンス行列の関係は

$$Z = 50(U + S)(U - S)^{-1} \quad \text{および} \quad Y = 0.02(U + S)^{-1}(U - S) \quad (7.18)$$

であり、お互いに逆行列の関係にある。

マイクロストリップ線路をシングルエンド励振するとき、両モードの位相速度が異なるときの S 行列のパラメータがどのような周波数特性となるかを調べる。

平行 2 本線モデルを基板厚 1.6 mm の FR4 基板で線路幅 2 mm、線間隔 2 mm とする。このときのキャパシタンス行列とインダクタンス行列は

$$C = \begin{bmatrix} 93.2 & -7.08 \\ -7.08 & 93.2 \end{bmatrix} (\text{pF}) \quad , \quad L = \begin{bmatrix} 0.37 & 0.05 \\ 0.05 & 0.37 \end{bmatrix} (\mu\text{H})$$

であり、モード特性インピーダンスは $Z_{0dm} = 111.6 \, \Omega$ 、 $Z_{0cm} = 35.2 \, \Omega$

モード位相速度は $v_{dm} = 1.79 \times 10^8 \, \text{m/s}$ 、 $v_{cm} = 1.65 \times 10^8 \, \text{m/s}$ である。次は線路長 20 cm のときの S 行列の周波数特性である。

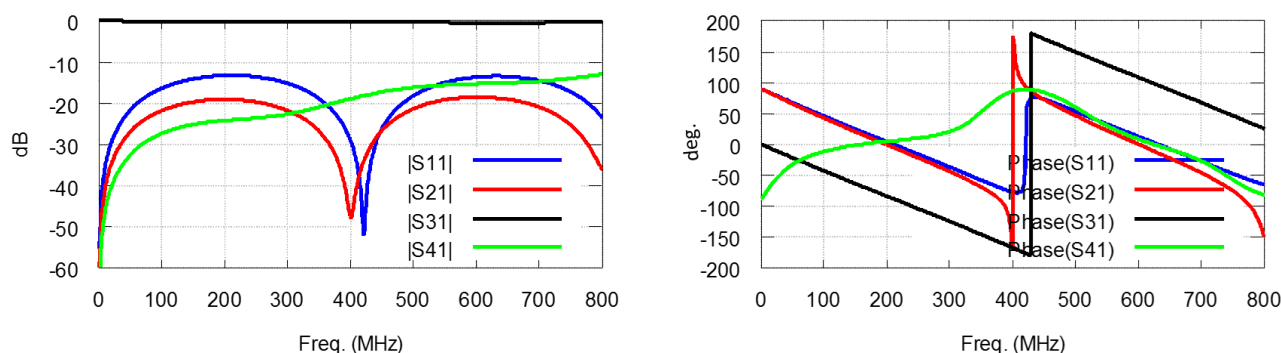


図 7.5 FR4 の回路基板上の平行 2 本線路の例

このモデルの誘電体を全て空気にとすると、モード特性インピーダンスは $Z_{0dm} = 187 \, \Omega$ 、 $Z_{0cm} = 63.8 \, \Omega$ となり、モード位相速度は $3 \times 10^8 \, \text{m/s}$ である。このときの周波数特性は図 7.6 となる。

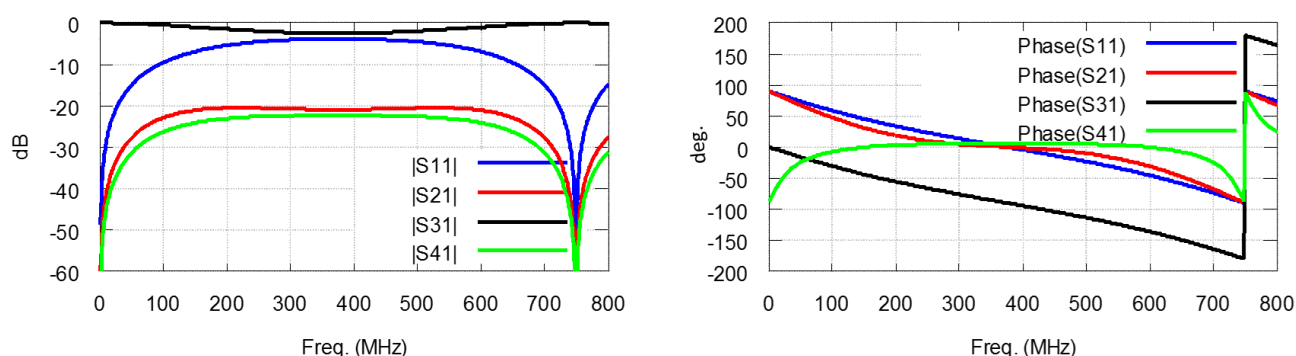


図 7.6 一様な誘電体中の平行 2 本線路の例：(前例の基材が空気の場合)

図 7.5 と図 7.6 とを比較すると、誘電率の違いにより両モードの特性インピーダンスはそれぞれ異なるが、図 7.5 では、両モードの位相速度は異なるのに対し、図 7.6 では、両モードの位相速度は等しい。この違いによる大きな違いは、遠端クロストーク (S_{41}) の特性である。両モードの位相速度が等しい場合は、 S_{41} の大きさは、近端クロストーク (S_{21}) の大きさを超えることはない。しかし、等しくない場合は周波数が高くなると遠端クロストークの方が大きくなる逆転現象が発生する。これはモード成分の位相差によって発生する現象である。

次の計算例は PCB 回路基板上の平行なパターン幅が一致していないときの例である。線路間隔が 2 mm で線路幅を 2 mm と 5 mm としたときである。このとき、キャパシタンスマトリックスとインダクタンスマトリックスは

$$C = \begin{bmatrix} 110 & -11.4 \\ -11.4 & 179 \end{bmatrix} (\text{pF}) \quad , \quad L = \begin{bmatrix} 0.37 & 0.04 \\ 0.04 & 0.22 \end{bmatrix} (\mu\text{H})$$

(注：このとき DM と CM は直交モードではない。次の計算は状態変数法での計算を採用している。)

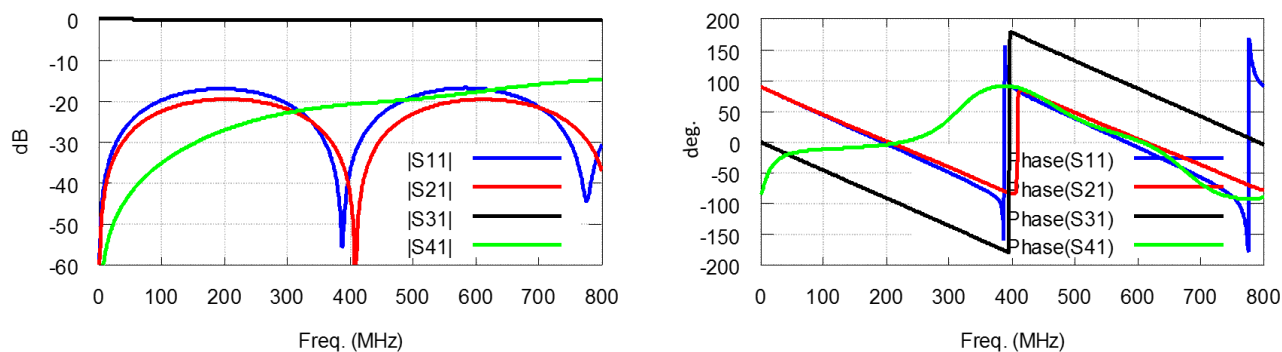


図 7.7 FR4 の回路基板上的異なるパターン幅の例（線路長 20 cm）

基板の誘電体を全て空気にしたときの特性は

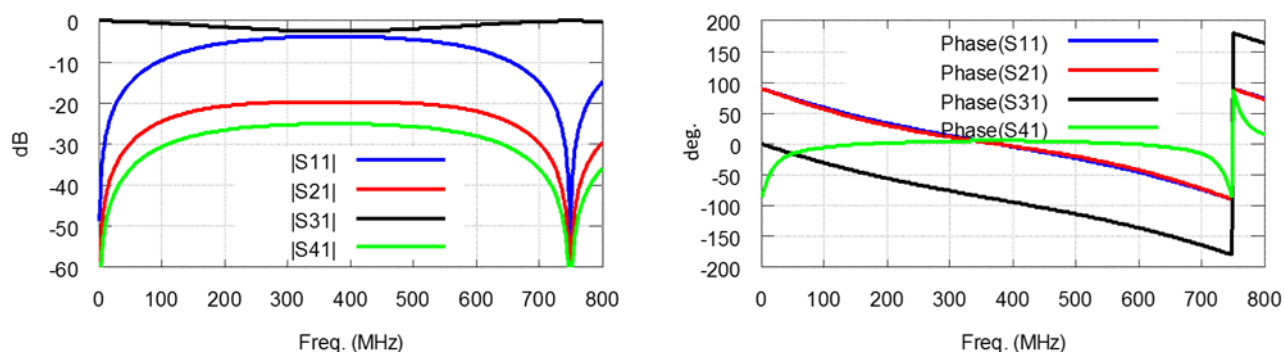


図 7.8 一様な誘電体中の異なるパターン幅の例

この場合においても、遠端クロストークが近端クロストークより高域においては大きくなる傾向は図 7.5 と同じである。これらの性質を以下の実験から確認する。

実験 7：2本線路系のクロストーク特性

注：ここで準備した線路系は端末リードの効果を含んだもので測定や計算を行う。

注：ここで使用する VNA は 2 ポートである。4 ポートの DUT を測定するときは、4 ポートのうち、2 ポートだけを VNA に接続し、他のポートは 50Ω 終端を接続する。

実験 7.1: マイクロストリップ線路形の平行 2 本線路をシングルエンド励振した時のクロストーク特性を測定し、その特性について考察せよ。



図 7.9 マイクロストリップ形の 2 本線路

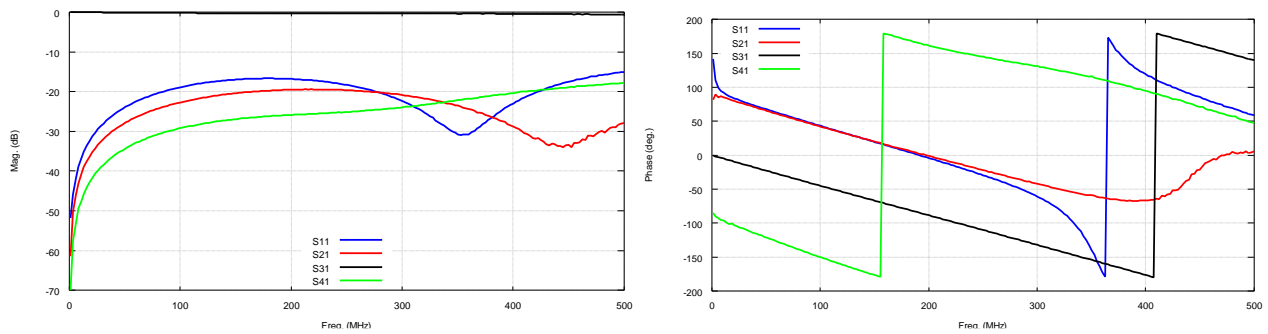


図 7.10 測定したマイクロストリップ線路の S 行列で表現するクロストーク特性

実験 7.2: 次のストリップ線路でのクロストーク現象を求めよ。

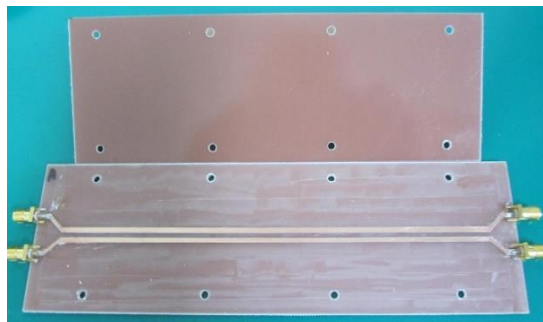


図 7.11 マイクロストリップ形に片面基板を重ねてストリップ形とした 2 本線路

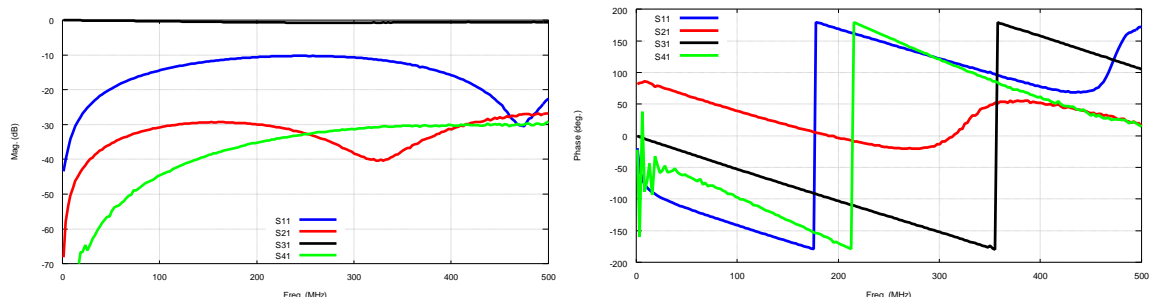


図 7.12 散乱行列で評価するクロストーク特性

問 実験 7.1 と実験 7.2 の結果から、 S_{11} と近端および遠端クロストーク (S_{21} および S_{41}) の違いについて確認せよ。

実験 7.3: 線幅の異なる 2 本の非対称な線で構成した系でのシングルエンド励振した時のクロストーク特性を求めよ。



図 7.13 非対称な 2 本線路系

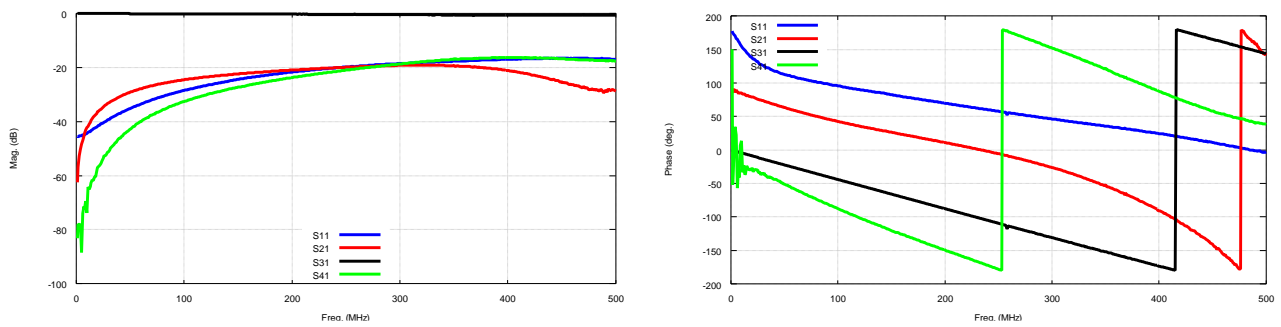


図 7.14 非対称線路の S 行列で評価するクロストーク測定結果例

実験 7.4: 次のように片面基板に配置した撚り対線 (Twisted pair line) でのクロストークを求めよ。

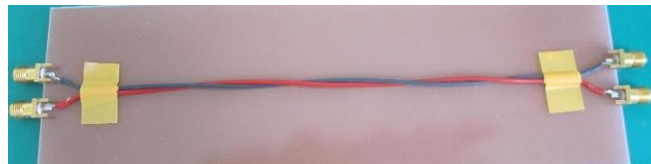


図 7.15 撚り対線モデル

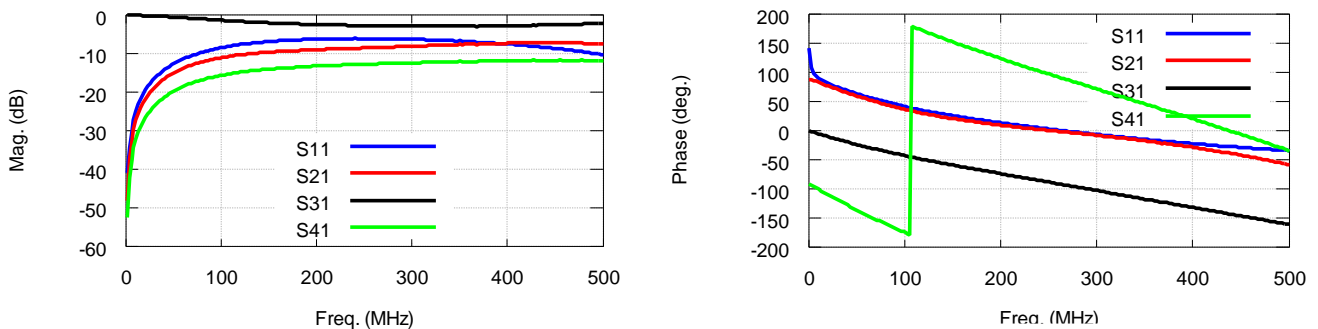


図 7.16 測定された撚り対線の S 行列で評価するクロストーク特性

7.5 モード変換の評価

DM や CM は対称な 2 本線路系での直交モードである。媒質が一様な対称でない導体構造の場合においては、DM と CM と同じような直交モード成分に分解できるが、モード変換行列は異なる。

注: マイクロ波回路の分野では直交モードとして、奇(odd)モードと偶(even)モードが使用される。このモードは DM と CM と同じ励振法で取り扱えるので、混同されている場合がある。これらの間にはモード変換行列が異なる。

7.5.1 逆相電流と同相電流

電源回路や負荷回路、さらには線路系に不平衡が存在するとモード変換が発生する。例えば、完全対称形の 2 本線路が T 型の負荷回路で終端されているモデルを考える。すると、終端の端子条件は

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{I} \Rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_2 \\ Z_2 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (7.19)$$

これを DM/CM でのモード変換行列を用いてモード変換して書き換えると

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_m = \mathbf{T}_v^{-1} \mathbf{Z} \mathbf{T}_i \mathbf{I}_m &\Rightarrow \begin{bmatrix} V_{dm} \\ V_{cm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{dm} \\ I_{cm} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Z_{11} + Z_{22} - 2Z_{12} & (Z_{11} - Z_{22})/2 \\ (Z_{11} - Z_{22})/2 & (Z_{11} + Z_{22} + 2Z_{12})/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{dm} \\ I_{cm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 & (Z_1 - Z_3)/2 \\ (Z_1 - Z_3)/2 & (Z_1 + Z_3)/4 + Z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{dm} \\ I_{cm} \end{bmatrix} \quad (7.20) \end{aligned}$$

注：この主対角要素は、モード変換が発生しているために通常のモードインピーダンスではない。

7.5.2 ミックスドモード S 行列

対称な 2 本線路系では、DM と CM が直交モード成分として、EMC の分野では使用されていることは前述の通りである。最近では DM 励振方式の回路が使われるようになり、CM 成分が放射妨害波の主流となることから、これを制御することが重要である。このための評価法としてミックスドモード S 行列が用いられる。

ここでは、回路基板での差動配線パターンで発生するモード変換をミックスドモード S 行列で評価する。これは通常の S 行列に変換行列を定義してモード変換量が求められるように定式化している。(詳細は附録 7 参照)

設定するポート番号を図 7.4 に示したものとして、変換行列を

$$\mathbf{M}_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.21)$$

とすると、ミックスド S 行列は、

$$\mathbf{S}_{mx} = \mathbf{M}_x \mathbf{S} \mathbf{M}_x^{-1} = \begin{bmatrix} S_{dd} & S_{dc} \\ S_{cd} & S_{cc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{dd11} & S_{dd12} & S_{dc11} & S_{dc12} \\ S_{dd21} & S_{dd22} & S_{dc21} & S_{dc22} \\ S_{cd11} & S_{cd12} & S_{cc11} & S_{cc12} \\ S_{cd21} & S_{cd22} & S_{cc21} & S_{cc22} \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

で与えられ、小行列 S_{dd} は DM の伝送特性を、 S_{cc} は CM の伝送特性を示し、 S_{cd} , S_{dc} は DM から CM へ、あるいは CM から DM への変換を意味している。

注：この変換において、DM モードおよび CM モード基準インピーダンスは、それぞれ 100Ω および 25Ω を基準インピーダンスとしている。

次の図は、図 7.5 の結果を得た同じ対称な平行 2 線のモデルである。ミックスドモード S 行列の計算例である。

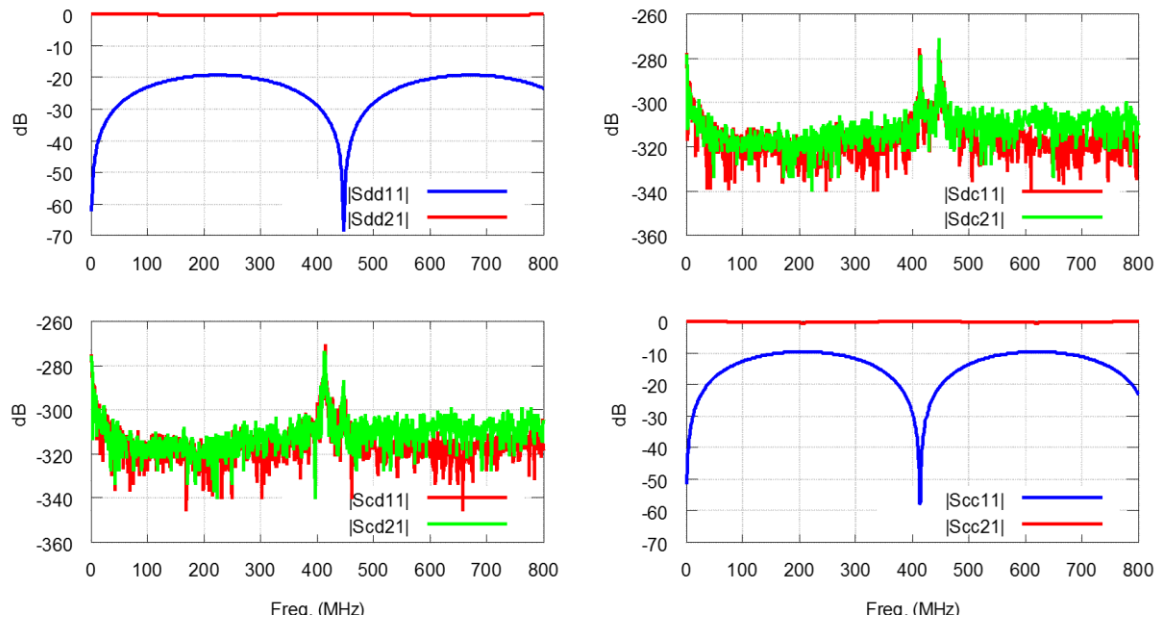


図 7.17 対称な平行 2 線のミックスド S 行列特性

図 7.17 の結果では、モード変換を意味する S_{cd21} や S_{dc21} が極端に小さい。平行 2 線のバランスがキャパシタンス行列の C_{22} で 93.2 pF から 93.3 pF になったとすれば、特性は次のようになる。

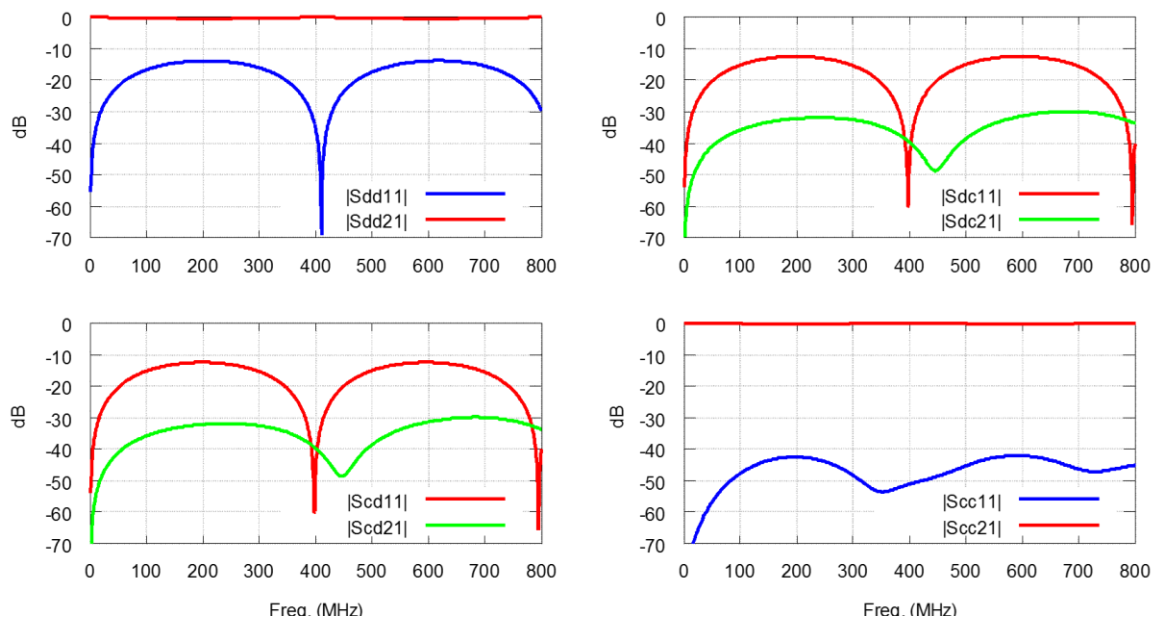


図 7.18 対称性が崩れたときのミックスド S 行列の例

図 7.18 の結果は S_{dc21} や S_{cd21} が大きくなっており、線路の物理的対称性がモード変換に最重要であることを示している。これを次の実験で確認する。

実験 8: ミックスドモード S 行列の測定

問 8.1 回路基板上に配置した線路パターン幅が大きく異なる非対称(Asymmetric)な 2 本線路系を構成し

た系でのミックスドモード S 行列を求めよ。

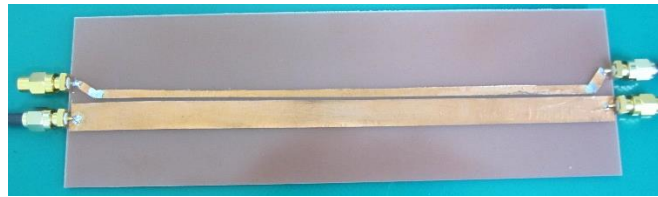


図 7.19 非対称線路の例

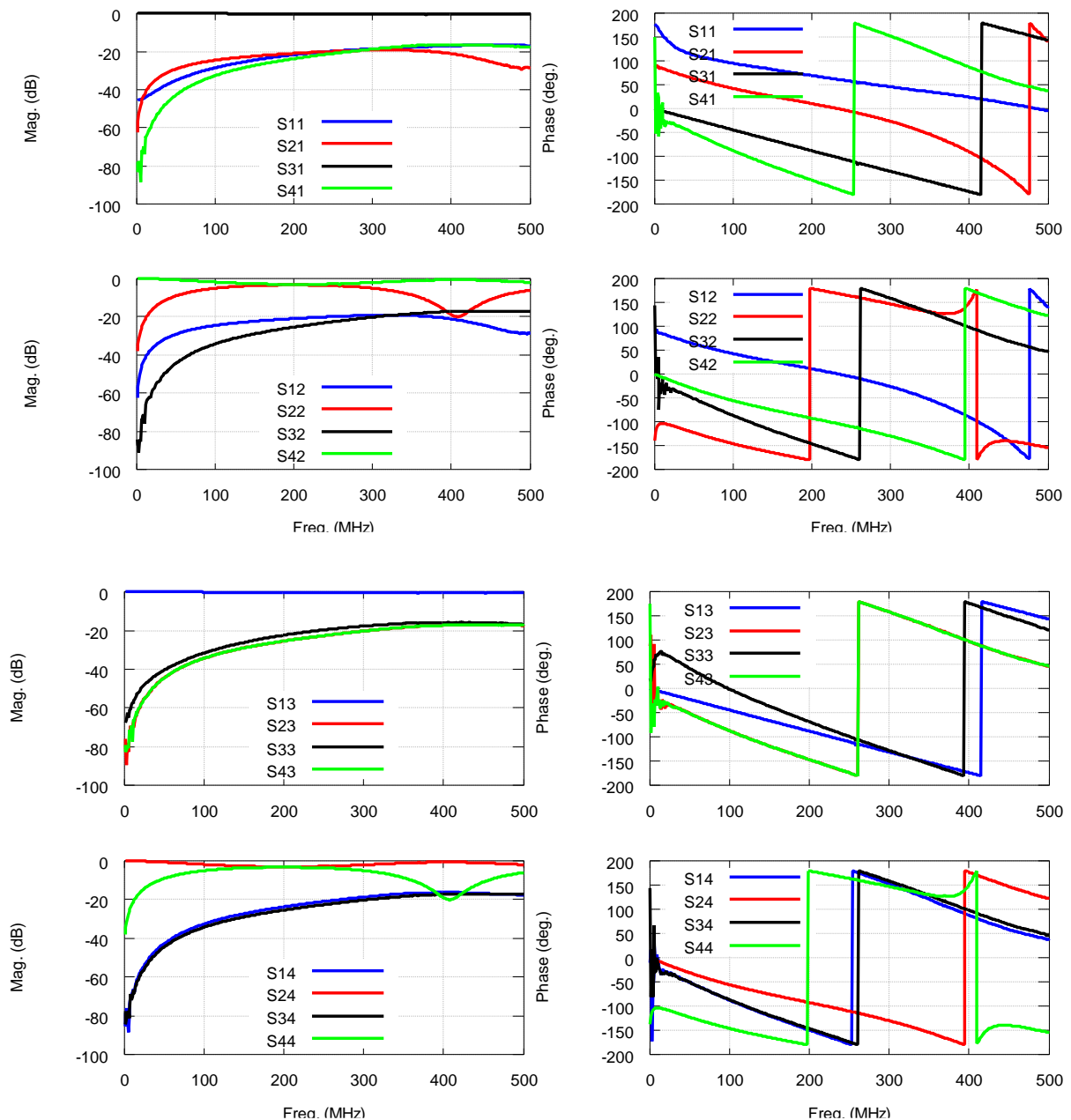


図 7.20 測定した S 行列の要素

図 7.20 の結果からミックスドモード S 行列を求めると、次のようになる。

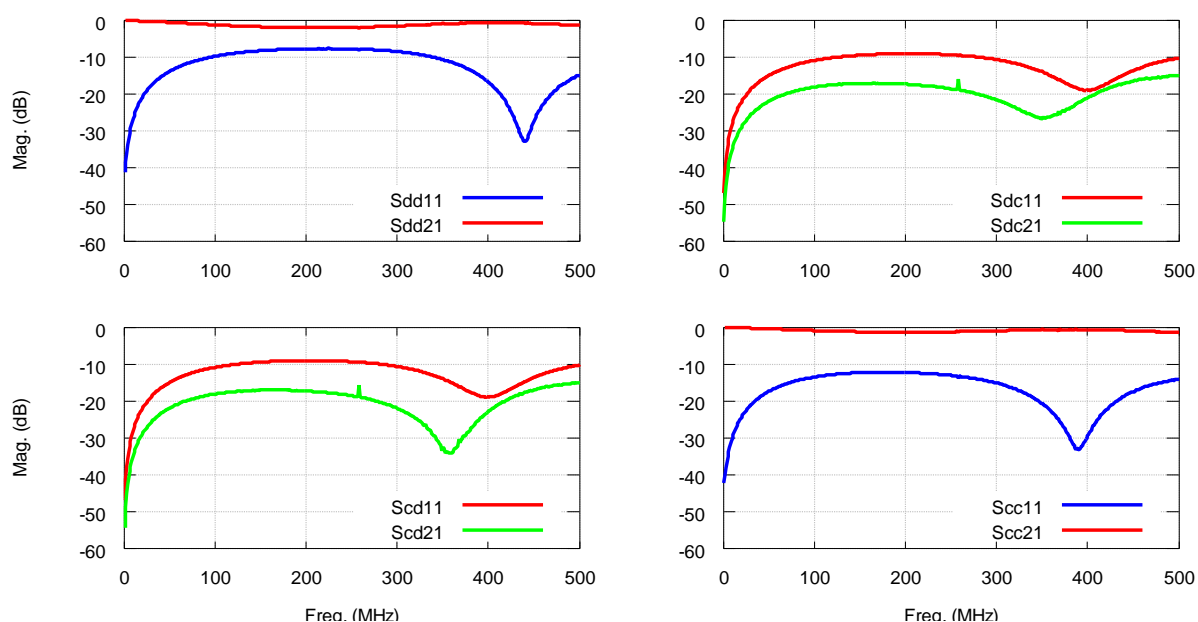


図 7.21 測定した S 行列から求めたミックスドモード S 行列の要素例

この結果から、線路幅が異なる平行 2 本線路系では、非対称の線路になっているので、モード変換の程度を示す S_{cd21} や S_{dc21} が -20 dB 以上の大きな値になっていることが分かる。

実験 8.2: 回路基板上に配置した撚り対 (ツイストペア) 線路系でのミックスドモード S 行列を求めよ。

撚り対線はハーネスによく使用されている。この線路は差動線路で使用すると、周波数が低いときは放射エミッションや放射イミュニティに関しては高い能力を持つとされている。しかし、近くにグラウンド面を含む導体が存在すると、その有利な点が損なわれる可能性がある。このモデルを考える。

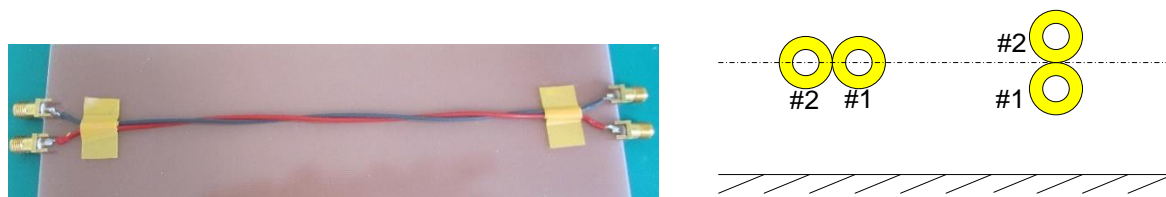


図 7.22 撚り対 (ツイストペア) 線路

グラウンド (GND) 面上の撚り対線は、図 7.22 右図に示すように断面構造は GND 面に対し一定ではない。これは対線の中心間を結ぶ線が GND 面に平行でない限り、自己キャパシタンスは $C_{g1} \neq C_{g2}$ である。しかし相互キャパシタンス $C_m (= -C_{12} = -C_{21})$ は殆ど変化しない (線路高が低いと変化する)。この結果、キャパシタンス行列では $C_{11} \neq C_{22}$ である。インダクタンス行列の要素にしても同様である。このような構造である撚り対線のモード変換を以下で調べる。

撚り対線路の S 行列の結果（ここでは省略）からミックスド S 行列を求めると、図 7.23 となる。

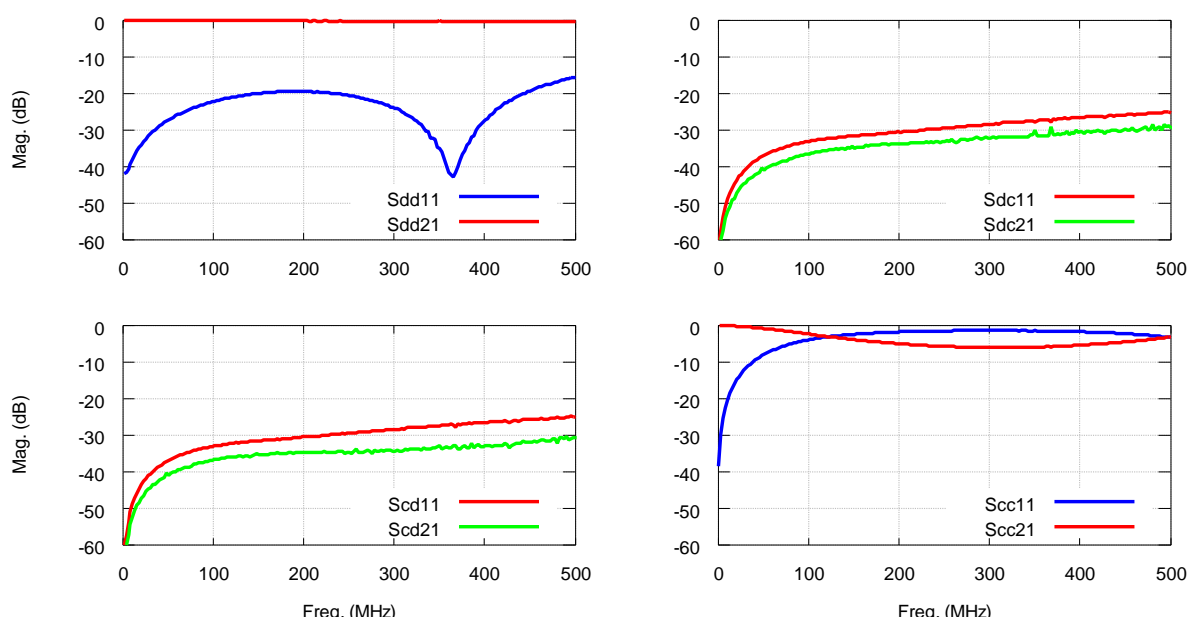


図 7.23 測定データから計算したミックスドモード S 行列要素の例

この例での結果は、 S_{dc21} や S_{cd21} が 100 MHz で約-35 dB、500 MHz で約-30 dB のレベルである。

参考：実験 7.1 で使用したマイクロストリップ線路の測定した S 行列からミックスドモード S 行列を計算すると、次のようになる。

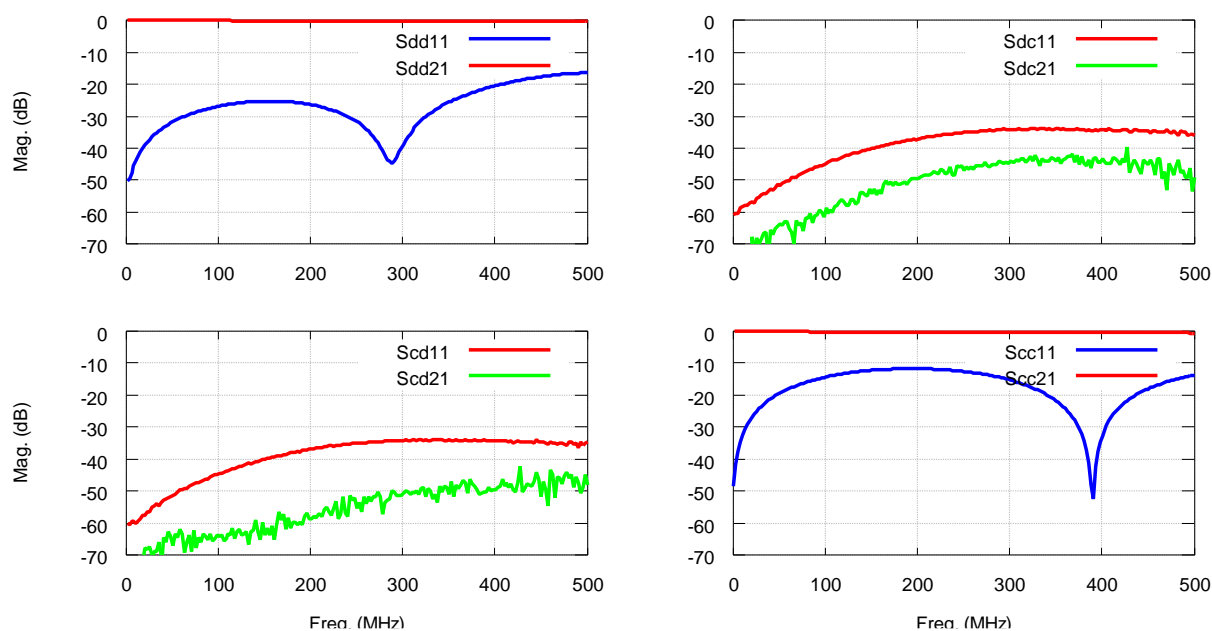


図 7.24 対称なマイクロストリップ線路でのモード変換特性

ストリップ線路では

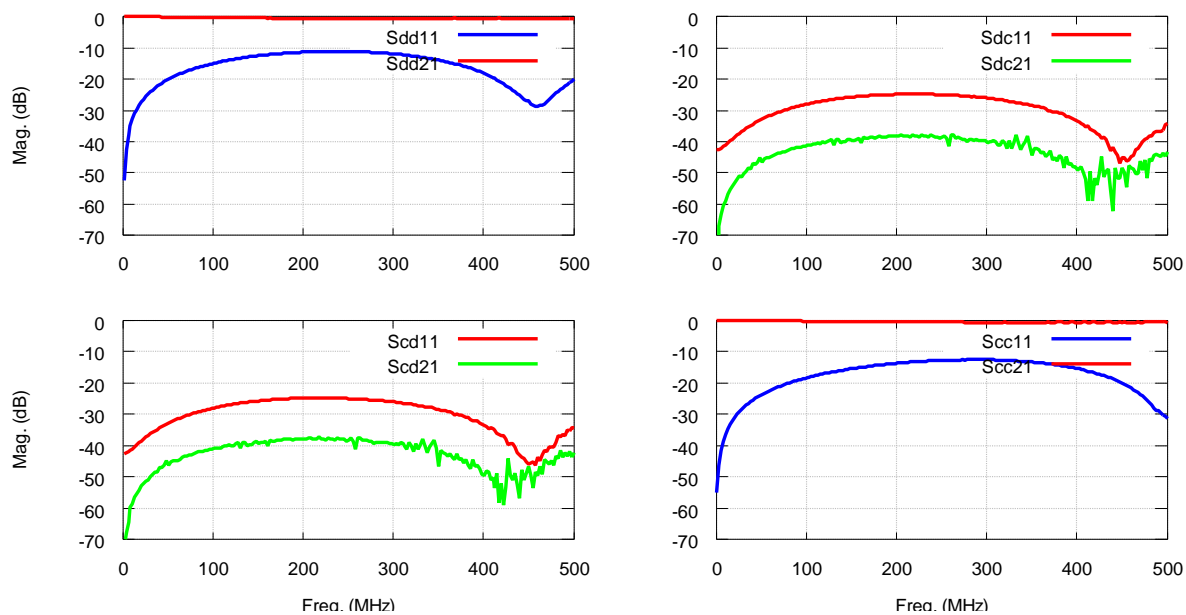


図 7.25 対称なストリップ線路でのモード変換特性

この結果は、モード変換を意味する S_{dc21} や S_{cd21} は、最大約-40 dB であり、非対称線路や撚り対線路に比べて小さい結果となっている。

附録と参考

附録 1 静電界で定義される電圧と KVL

静電界において、任意点 a の電位 (potential) ϕ_a は電界 (ベクトル) \vec{E} を無限遠点から任意点までの線積分として定義され、その結果、2 点間 $b \rightarrow a$ の電位差 ϕ_{ab} は

$$\phi_a = -\int_{\infty}^a \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad , \quad \phi_{ab} = -\int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (A1.1)$$

で定義されている。これが電気回路での電圧に対応している。

2 点間の電位を求めるための経路を、一回りする閉路 (閉曲線) に選択すれば、同一の点での電位差を求めることになる。すなわち、電界の電位に関する定義から、2 点間の電位を求めるための経路 C を一回りする閉じた経路にすれば、同一点での電位差を求めることになり、

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (A1.2)$$

である。この電位差は必然的に零となる性質を示しており、静電界の周回積分則と呼ばれている。

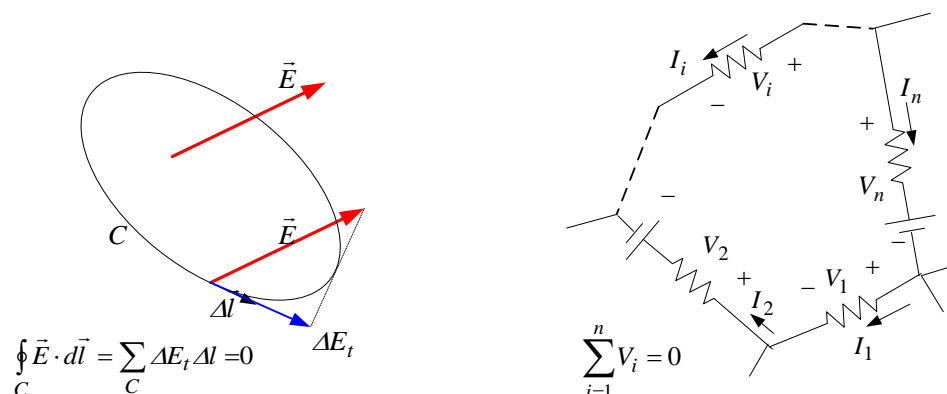


図 A. 1 静電界の周回積分則と Kirchhoff の電圧則

附録 2 電荷保存則 (電流連続の式) と KCL

Kirchhoff の電流則 (KCL) は、電磁気学においては電荷保存則あるいは電流連続の式に対応している。電荷保存則は、一般には \vec{J} を電流密度ベクトル、 ρ を電荷密度として

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad , \quad \oint_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dv \quad (A2.1)$$

と表現される。この積分形では、閉じられた空間 V を取り囲む面 (閉曲面) S を出て行く電流は、体積 V 中の電荷の時間的減少率に等しいことを表現している。静電磁界においては時間的変化が無いときであるので、

$$\oint_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (\text{A2.2})$$

と表現でき、閉曲面に入り込む電流は出て行く電流と等しいということになる。電気回路における Kirchhoff の電流則はこれに対応し、「節点に出入りする電流の代数和はゼロである」という法則になる：

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0 \quad (\text{A2.3})$$

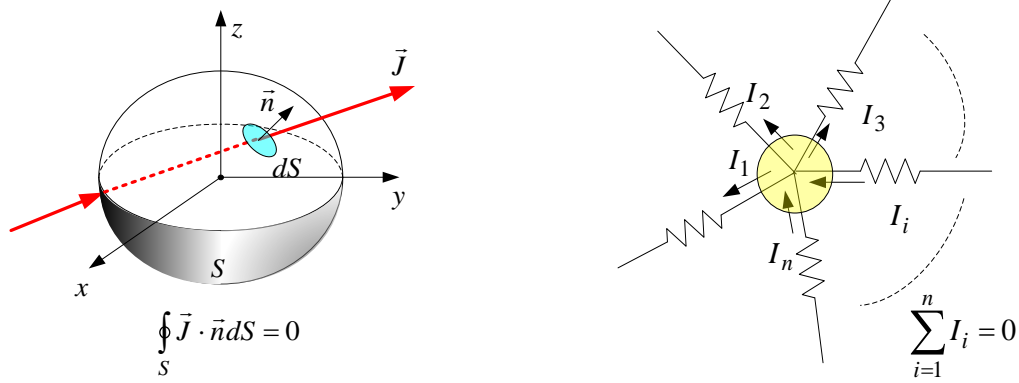


図 A.2 電荷保存則(左図)と Kirchhoff の電流則(右図)

附録 3 インピーダンス行列およびアドミッタンス行列と S 行列の関係

一般の回路網での回路方程式は、インピーダンス行列あるいはアドミッタンス行列で表記すると

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad \text{および} \quad \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A3.1})$$

である。回路網のポート電圧ベクトル $[V_1, V_2]^T$ (上部添え字 T は転置行列を意味する) はそれぞれのポートの入射波と出射波を用いて表現すると、**基準インピーダンス**を $Z_s = Z_0$ として

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{Z_0}(a_1 + b_1) \\ \sqrt{Z_0}(a_2 + b_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{Z_0} & 0 \\ 0 & \sqrt{Z_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A3.2})$$

となり、回路網のポート電流ベクトル $[I_1, I_2]^T$ は、 $Y_0 = 1/Z_0$ として

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{Y_0}(a_1 - b_1) \\ \sqrt{Y_0}(a_2 - b_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{Y_0} & 0 \\ 0 & \sqrt{Y_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A3.3})$$

となる。これをインピーダンス行列表示の電流ベクトルに代入すると

$$\begin{bmatrix} \sqrt{Z_0} & 0 \\ 0 & \sqrt{Z_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{Y_0} & 0 \\ 0 & \sqrt{Y_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A3.4})$$

となり、これを整理すると、

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sqrt{Z_0} & 0 \\ 0 & \sqrt{Z_0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{Y_0} & 0 \\ 0 & \sqrt{Y_0} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \begin{bmatrix} Z_{11}/Z_0 & Z_{12}/Z_0 \\ Z_{21}/Z_0 & Z_{22}/Z_0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \right\} \equiv \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned} \tag{A3.5}$$

これから出射波を入射波で表現すると、

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \tag{A3.6}$$

従って、散乱行列 \mathbf{S} をインピーダンス行列で書くことができる：

$$\mathbf{S} = \{\mathbf{z} + \mathbf{U}\}^{-1} \{\mathbf{z} - \mathbf{U}\} = \{\mathbf{z} - \mathbf{U}\} \{\mathbf{z} + \mathbf{U}\}^{-1} \tag{A3.7}$$

ここで、 \mathbf{z} はインピーダンス行列 \mathbf{Z} を Z_0 で除した正規化インピーダンス行列である。

逆に、正規化インピーダンス行列 \mathbf{z} およびインピーダンス行列 \mathbf{Z} は

$$\mathbf{z} = \{\mathbf{U} + \mathbf{S}\} \{\mathbf{U} - \mathbf{S}\}^{-1}, \quad \mathbf{Z} = Z_0 \mathbf{z} = Z_0 \{\mathbf{U} + \mathbf{S}\} \{\mathbf{U} - \mathbf{S}\}^{-1} \tag{A3.8}$$

となる。

同様にアドミッタンス行列の電流ベクトルと電圧ベクトルを入射波と出射波で表現することによって、散乱行列と正規化アドミッタンス行列 \mathbf{y} の関係が次のようになる。

$$\mathbf{S} = \{\mathbf{U} + \mathbf{y}\}^{-1} \{\mathbf{U} - \mathbf{y}\} = \{\mathbf{U} - \mathbf{y}\} \{\mathbf{U} + \mathbf{y}\}^{-1} \tag{A3.9}$$

逆に、正規化アドミッタンス行列 \mathbf{y} およびアドミッタンス行列 \mathbf{Y} を \mathbf{S} 行列で表現すると、

$$\mathbf{y} = \{\mathbf{S} - \mathbf{U}\} \{\mathbf{S} + \mathbf{U}\}^{-1}, \quad \mathbf{Y} = Y_0 \mathbf{y} = Y_0 \{\mathbf{S} - \mathbf{U}\} \{\mathbf{S} + \mathbf{U}\}^{-1} \tag{A3.10}$$

となる。

\mathbf{S} 行列と縦続行列との関係を直接的に表現すると、表示が煩雑になりここでは詳細な式は省略する。計算する際には、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{11}\mathbf{Z}_{21}^{-1} & \mathbf{Z}_{11}\mathbf{Z}_{22}\mathbf{Z}_{21}^{-1} - \mathbf{Z}_{21} \\ \mathbf{Z}_{21}^{-1} & \mathbf{Z}_{22}\mathbf{Z}_{21}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{Y}_{21}^{-1}\mathbf{Y}_{22} & \mathbf{Y}_{21}^{-1} \\ \mathbf{Y}_{12} - \mathbf{Y}_{11}\mathbf{Y}_{21}^{-1}\mathbf{Y}_{22} & \mathbf{Y}_{11}\mathbf{Y}_{21}^{-1} \end{bmatrix} \tag{A3.11}$$

から求められる。

附録4 Heaviside の電信方程式を電磁界表現から求める

条件 2 からは、

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_a^b E_y dy \right\} = - \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_a^b \mu_0 H_z dy \right\} \tag{A4.1}$$

$$- \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_a^b \mu_0 H_z dy \right\} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_a^b E_y dy \right\} \tag{A4.2}$$

が導出できる。

これらの電磁界と回路素子との関係は、例えば、2 本線路による伝送線路を考えると、

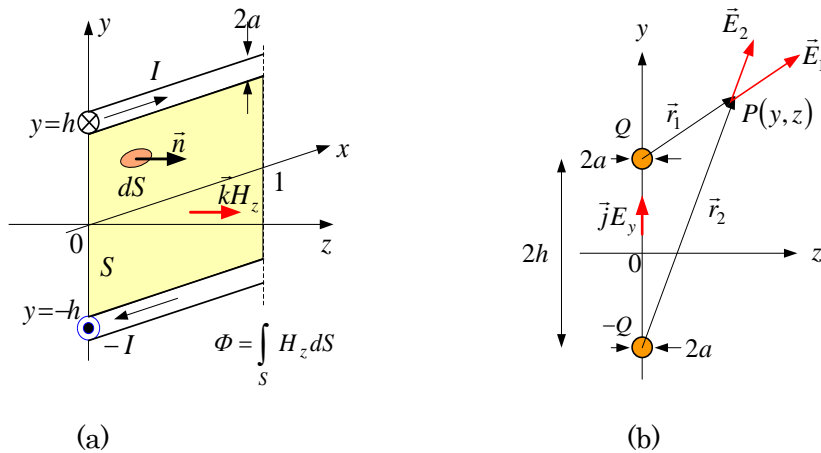


図 A4.1 線路インダクタンスを求める模式図(a)と
線路キャパシタンスを求める模式図(b)

図 A4.1(a)において導体を通る電流を囲む閉曲線(周回路)を C_r とすれば、電流は

$$I = \oint_{C_r} \vec{H}_t \cdot d\vec{l} \quad (\text{A4.3})$$

であり、定常電流界の静磁界におけるインダクタンスの定義から単位長で線路間の面 S を鎖交する磁束 Φ との関係は

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \int_S \mu_0 \vec{H} \cdot \vec{n} dS = LI \quad (\text{A4.4})$$

である。

図 A4.1(b)においては、半径 a の円形導体を中心間距離 $2h$ である導体間の電圧が

$$V_{ba} = - \int_a^b \vec{E}_t \cdot d\vec{l} = - \int_{-(h-a)}^{(h-a)} jE_y \cdot (jdy) = - \int_{-(h-a)}^{(h-a)} E_y dy \quad (\text{A4.5})$$

と表現され、さらに静電界でのキャパシタンスの定義から

$$Q = CV_{ba} = -C \int_a^b \vec{E}_t \cdot d\vec{l} = -C \int_{-(h-a)}^{(h-a)} E_y dy \quad (\text{A4.6})$$

である。これらを用いることによって、半径 a の円形導体を中心間距離 $2h$ である伝送線路であれば、 $V_{ab} \Rightarrow V$ と書き換えて

$$\frac{d}{dx} \left\{ \int_{-(h-a)}^{(h-a)} E_y dy \right\} = - \frac{dV}{dx} = -j\omega \left\{ \int_{-(h-a)}^{(h-a)} \mu_0 H_z dy \right\} = j\omega LI \quad (\text{A4.7})$$

これは、電信方程式の第 1 式であり、第 2 式は

$$-\frac{d}{dx} \left\{ \int_{-(h-a)}^{(h-a)} \mu_0 H_z dy \right\} = L \frac{dI}{dx} = \mu_0 \varepsilon_0 j \omega \left\{ \int_{-(h-a)}^{(h-a)} E_y dy \right\} = -\mu_0 \varepsilon_0 j \omega V \quad (\text{A4.8})$$

から TEM モード波の伝搬速度が $v_0 = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = 1/\sqrt{LC}$ であることを利用すると電信方程式が導出できる。

附録5 伝送線路の縦続行列

電信方程式の解表現として与えた進行波、後退波の表現を行列表現で与えると、

$$\begin{bmatrix} V(x) \\ I(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_x \\ I_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-j\beta x} & e^{j\beta x} \\ \frac{1}{Z_0} e^{-j\beta x} & -\frac{1}{Z_0} e^{j\beta x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A5.1})$$

である。今、長さ l の伝送線路を考え、端子条件として $x=0$ における線路電圧と電流を V_0 と I_0 とすれば、

$$\begin{bmatrix} V_0 \\ I_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1/Z_0 & -1/Z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & Z_0 \\ 1 & -Z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0 \\ I_0 \end{bmatrix} \quad (\text{A5.2})$$

となる。この結果、任意点の線路電圧、電流を始端の線路電圧、電流で表現する方程式が

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V_x \\ I_x \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} e^{-j\beta x} & e^{j\beta x} \\ \frac{1}{Z_0} e^{-j\beta x} & -\frac{1}{Z_0} e^{j\beta x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-j\beta x} & e^{j\beta x} \\ \frac{1}{Z_0} e^{-j\beta x} & -\frac{1}{Z_0} e^{j\beta x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Z_0 \\ 1 & -Z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0 \\ I_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \beta x & -jZ_0 \sin \beta x \\ -j(1/Z_0) \sin \beta x & \cos \beta x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0 \\ I_0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A5.3})$$

と求められる。この逆を求めると、

$$\begin{bmatrix} V_0 \\ I_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta x & jZ_0 \sin \beta x \\ j(1/Z_0) \sin \beta x & \cos \beta x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ I_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(x) & B(x) \\ C(x) & D(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ I_x \end{bmatrix} \quad (\text{A5.4})$$

となる。これが伝送線路の縦続行列(ABCD 行列)である。

附録6 モード電圧・電流から実電圧・電流への変換

モード電圧およびモード電流ベクトルを

$$\mathbf{V}_m = \begin{bmatrix} V_{dm} \\ V_{cm} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_m = \begin{bmatrix} I_{dm} \\ I_{cm} \end{bmatrix} \quad (\text{A6.1})$$

と表現し、モード縦続行列の各要素を次の小行列で表現すると

$$\mathbf{A}_m = \begin{bmatrix} A_{dm} & 0 \\ 0 & A_{cm} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_m = \begin{bmatrix} B_{dm} & 0 \\ 0 & B_{cm} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_m = \begin{bmatrix} C_{dm} & 0 \\ 0 & C_{cm} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_m = \begin{bmatrix} D_{dm} & 0 \\ 0 & D_{cm} \end{bmatrix} \quad (\text{A6.2})$$

実電圧・電流ベクトルはモード変換行列を用いて、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{V}(0) \\ \mathbf{I}(0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{T}_v & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{T}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_m(0) \\ \mathbf{I}_m(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_v & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{T}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_m & \mathbf{B}_m \\ \mathbf{C}_m & \mathbf{D}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_m(l) \\ \mathbf{I}_m(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_v & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{T}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_m & \mathbf{B}_m \\ \mathbf{C}_m & \mathbf{D}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_v^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{T}_i^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}(l) \\ \mathbf{I}(l) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{T}_v \mathbf{A}_m \mathbf{T}_v^{-1} & \mathbf{T}_v \mathbf{B}_m \mathbf{T}_i^{-1} \\ \mathbf{T}_i \mathbf{C}_m \mathbf{T}_v^{-1} & \mathbf{T}_i \mathbf{D}_m \mathbf{T}_i^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}(l) \\ \mathbf{I}(l) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A6.3})$$

となる。各要素行列を書き下すと

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \mathbf{T}_v \mathbf{A}_m \mathbf{T}_v^{-1} &= \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{dm} & 0 \\ 0 & A_{cm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A_{cm} + A_{dm})/2 & (A_{cm} - A_{dm})/2 \\ (A_{cm} - A_{dm})/2 & (A_{cm} + A_{dm})/2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cos \theta_{cm} + \cos \theta_{dm} & \cos \theta_{cm} - \cos \theta_{dm} \\ \cos \theta_{cm} - \cos \theta_{dm} & \cos \theta_{cm} + \cos \theta_{dm} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A6.4})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = \mathbf{T}_v \mathbf{B}_m \mathbf{T}_i^{-1} &= \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{dm} & 0 \\ 0 & B_{cm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{cm} + B_{dm}/4 & B_{cm} - B_{dm}/4 \\ B_{cm} - B_{dm}/4 & B_{cm} + B_{dm}/4 \end{bmatrix} \\ &= j \begin{bmatrix} Z_{0cm} \sin \theta_{cm} + (Z_{0dm}/4) \sin \theta_{dm} & Z_{0cm} \sin \theta_{cm} - (Z_{0dm}/4) \sin \theta_{dm} \\ Z_{0cm} \sin \theta_{cm} - (Z_{0dm}/4) \sin \theta_{dm} & Z_{0cm} \sin \theta_{cm} + (Z_{0dm}/4) \sin \theta_{dm} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A6.5})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C} = \mathbf{T}_i \mathbf{C}_m \mathbf{T}_v^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{dm} & 0 \\ 0 & C_{cm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{cm}/4 + C_{dm} & C_{cm}/4 - C_{dm} \\ C_{cm}/4 - C_{dm} & C_{cm}/4 + C_{dm} \end{bmatrix} \\ &= j \begin{bmatrix} (Y_{0cm}/4) \sin \theta_{cm} + Y_{0dm} \sin \theta_{dm} & (Y_{0cm}/4) \sin \theta_{cm} - Y_{0dm} \sin \theta_{dm} \\ (Y_{0cm}/4) \sin \theta_{cm} - Y_{0dm} \sin \theta_{dm} & (Y_{0cm}/4) \sin \theta_{cm} + Y_{0dm} \sin \theta_{dm} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A6.6})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D} = \mathbf{T}_i \mathbf{D}_m \mathbf{T}_i^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{dm} & 0 \\ 0 & D_{cm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (D_{cm} + D_{dm})/2 & (D_{cm} - D_{dm})/2 \\ (D_{cm} - D_{dm})/2 & (D_{cm} + D_{dm})/2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cos \theta_{cm} + \cos \theta_{dm} & \cos \theta_{cm} - \cos \theta_{dm} \\ \cos \theta_{cm} - \cos \theta_{dm} & \cos \theta_{cm} + \cos \theta_{dm} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A6.7})$$

これらの小行列は、対称行列ではあるが対角行列ではない。このことは、非対角要素が

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(2,1) = \mathbf{A}(1,2) = \mathbf{A}_{21} = \mathbf{A}_{12} &= \{\cos(\beta_{cm}l) - \cos(\beta_{dm}l)\}/2 \\ &= \{\cos(\omega l / v_{cm}) - \cos(\omega l / v_{dm})\}/2 \end{aligned}$$

$$= \left\{ \cos(\sqrt{\varepsilon_{cm}} \omega l / v_0) - \cos(\sqrt{\varepsilon_{dm}} \omega l / v_0) \right\} / 2 \quad (\text{A6.8})$$

であるので、両モードの位相定数あるいは伝搬速度あるいは実効誘電率が等しくない限り、即ち誘電体が全て空気のように、均一な誘電体でない限りこれは零とならない。さらに均一誘電体であったとしても

$$\mathbf{B}(2,1) = \mathbf{B}(1,2) = \mathbf{B}_{21} = \mathbf{B}_{12} = j\{Z_{0cm} \sin(\beta_{cm}l) - (Z_{0dm}/4) \sin(\beta_{dm}l)\} \quad (\text{A6.9})$$

は $Z_{0cm} = Z_{0dm}/4$ でない限り、零にはならない。この条件は数学的に満足する線路系はない。これが特異な現象を呈することになる。

注：このモード分解法は、詳細は割愛するが数学的には固有ベクトルと固有値を求めることで分解できる。このクラスでは、次の状態変数法で実電圧、実電流の解を求める。

..... **附録7 ミックスドモード S 行列への変換**

図に示すように 4 ポート回路網にポート番号を規定する。この 4 ポート回路網の散乱行列を

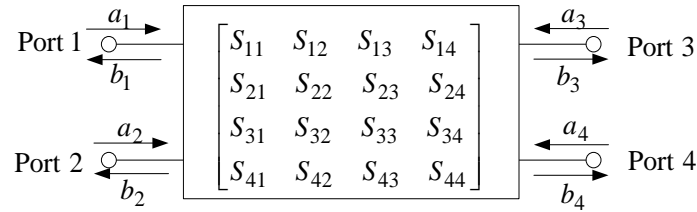


図 4 ポート回路網での散乱行列

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{S}\mathbf{a} \quad (\text{A7.1})$$

とする。ここで、ポート $n(=1, \dots, 4)$ における入射波 a_n および出射波 b_n とポートの電圧 V_n および電流 I_n との関係は定義式から、**基準インピーダンス**を $Z_s = Z_0$ として

$$a_n = \frac{1}{2\sqrt{Z_0}} \{V_n + Z_0 I_n\} \quad \text{および} \quad b_n = \frac{1}{2\sqrt{Z_0}} \{V_n - Z_0 I_n\} \quad (\text{A7.2})$$

である。

この回路網の各ポートの組で、ディファレンシャルモード (DM) とコモンモード (CM) に分解したときのモード入射波と出射波は、各モードの基準インピーダンスをそれぞれ Z_{dm} および Z_{cm} とすれば、

$$a_{dm} = \frac{1}{2\sqrt{Z_{dm}}} \{V_{dm} + Z_{dm} I_{dm}\} \quad \text{および} \quad b_{dm} = \frac{1}{2\sqrt{Z_{dm}}} \{V_{dm} - Z_{dm} I_{dm}\} \quad (\text{A7.3})$$

$$a_{cm} = \frac{1}{2\sqrt{Z_{cm}}} \{V_{cm} + Z_{cm}I_{cm}\} \quad \text{および} \quad b_{cm} = \frac{1}{2\sqrt{Z_{cm}}} \{V_{cm} - Z_{cm}I_{cm}\} \quad (\text{A7.4})$$

と定義できることになる。ここでモード電圧・電流と実電圧・電流の関係は、モード変換行列を用いて、例えば、ポート 1 と 2 の組では

$$\begin{bmatrix} V_{dm} \\ V_{cm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 - V_2 \\ (V_1 + V_2)/2 \end{bmatrix} \quad \text{および} \quad \begin{bmatrix} I_{dm} \\ I_{cm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I_1 - I_2)/2 \\ I_1 + I_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A7.5})$$

となる。

いま、DM と CM の基準インピーダンスを

$$Z_{dm} = 2Z_0 \quad \text{および} \quad Z_{cm} = Z_0/2 \quad (\text{A7.6})$$

と規定すれば、ポート 1 と 2 の組（ペア 1）での DM での入射波 $a_{dm,1}$ と出射波 $b_{dm,1}$ は、

$$\begin{aligned} a_{dm,1} &= \frac{1}{2\sqrt{Z_{dm}}} \{V_{dm,1} + Z_{dm}I_{dm,1}\} = \frac{1}{2\sqrt{Z_{dm}}} \{(V_1 - V_2) + Z_{dm}(I_1 - I_2)/2\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{2\sqrt{Z_0}} \{(V_1 + Z_0I_1) - (V_2 + Z_0I_2)\} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1 - a_2) \end{aligned} \quad (\text{A7.7})$$

および

$$\begin{aligned} b_{dm,1} &= \frac{1}{2\sqrt{Z_{dm}}} \{V_{dm,1} - Z_{dm}I_{dm,1}\} = \frac{1}{2\sqrt{Z_{dm}}} \{(V_1 - V_2) - Z_{dm}(I_1 - I_2)/2\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{2\sqrt{Z_0}} \{(V_1 - Z_0I_1) - (V_2 - Z_0I_2)\} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} (b_1 - b_2) \end{aligned} \quad (\text{A7.8})$$

となる。CM での入射波 $a_{cm,1}$ と出射波 $b_{cm,1}$ は、

$$\begin{aligned} a_{cm,1} &= \frac{1}{2\sqrt{Z_{cm}}} \{V_{cm,1} + Z_{cm}I_{cm,1}\} = \frac{1}{2\sqrt{Z_{cm}}} \{(V_1 + V_2)/2 + Z_{cm}(I_1 + I_2)\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{2\sqrt{Z_0}} \{(V_1 + Z_0I_1) + (V_2 + Z_0I_2)\} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1 + a_2) \end{aligned} \quad (\text{A7.9})$$

および

$$b_{cm,1} = \frac{1}{2\sqrt{Z_{cm}}} \{V_{cm,1} - Z_{cm}I_{cm,1}\} = \frac{1}{2\sqrt{Z_{cm}}} \{(V_1 + V_2)/2 - Z_{cm}(I_1 + I_2)\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{2\sqrt{Z_0}} \{ (V_1 - Z_0 I_1) + (V_2 - Z_0 I_2) \} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} (b_1 + b_2) \quad (\text{A7.10})$$

ポート 3 と 4 の組（ペア 2）においても同様にして、

$$a_{dm,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_3 - a_4), \quad b_{dm,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (b_3 - b_4) \quad (\text{A7.11})$$

および

$$a_{cm,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_3 + a_4), \quad b_{cm,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (b_3 + b_4) \quad (\text{A7.12})$$

となる。これらを行列形式でまとめると、

$$\begin{bmatrix} a_{dm,1} \\ a_{dm,2} \\ a_{cm,1} \\ a_{cm,2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{a}_m = \mathbf{M}_x \mathbf{a} \quad (\text{A7.13})$$

および

$$\begin{bmatrix} b_{dm,1} \\ b_{dm,2} \\ b_{cm,1} \\ b_{cm,2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{b}_m = \mathbf{M}_x \mathbf{b} \quad (\text{A7.14})$$

となる。この結果、モード入射波とモード出射波との関係は、

$$\mathbf{b}_m = \mathbf{M}_x \mathbf{b} = \mathbf{M}_x \{ \mathbf{S} \mathbf{a} \} = \{ \mathbf{M}_x \mathbf{S} \mathbf{M}_x^{-1} \} \mathbf{a}_m \equiv \mathbf{s}_m \mathbf{a}_m \quad (\text{A7.15})$$

となり、この \mathbf{s}_m がミックスドモード \mathbf{S} 行列である。

参考1 回路網の入力インピーダンスと反射係数

散乱行列 \mathbf{S} の要素 S_{11} は、前述したように回路網を基準インピーダンス $Z_s = Z_0$ で終端したときの入力ポートにおける反射係数である。 \mathbf{S} の要素をインピーダンス行列の要素で表現すると、

$$\mathbf{S} = \{ \mathbf{Z} - Z_0 \mathbf{U} \} \{ \mathbf{Z} + Z_0 \mathbf{U} \}^{-1} \quad (\text{R1.1})$$

であるので、これを分解表現すると、

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} - Z_0 & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} - Z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{11} + Z_0 & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} + Z_0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{4_Z} \begin{bmatrix} Z_{11} - Z_0 & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} - Z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{22} + Z_0 & -Z_{12} \\ -Z_{21} & Z_{11} + Z_0 \end{bmatrix} \quad (\text{R1.2})$$

ここで、 $4_Z = (Z_{11} + Z_0)(Z_{22} + Z_0) - Z_{12}Z_{21}$ である。この結果、反射係数は

$$S_{11} = \frac{(Z_{11} - Z_0)(Z_{22} + Z_0) - Z_{12}Z_{21}}{(Z_{11} + Z_0)(Z_{22} + Z_0) - Z_{12}Z_{21}} \quad (\text{R1.3})$$

となる。

今、インピーダンス行列で与えられた回路の出力ポートが Z_0 で終端されているとき、入力ポートから回路網を見込んだ入力インピーダンスを考える。

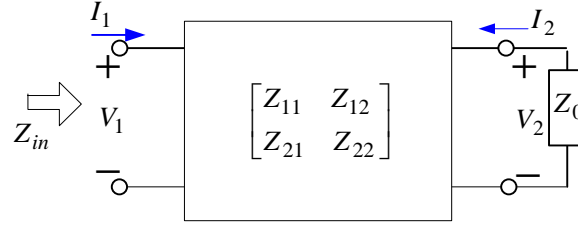


図 2.10 Z_0 で終端されているインピーダンス行列表示の回路網

このとき、出力ポートの端子条件は $V_2 = -Z_0 I_2$ であるので、回路方程式は

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} + Z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (\text{R1.4})$$

したがって、

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} + Z_0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{V_1}{Z_{11}(Z_{22} + Z_0) - Z_{12}Z_{21}} \begin{bmatrix} Z_{22} + Z_0 \\ -Z_{21} \end{bmatrix} \quad (\text{R1.5})$$

$$\Rightarrow Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{Z_{11}(Z_{22} + Z_0) - Z_{12}Z_{21}}{Z_{22} + Z_0} \quad (\text{R1.6})$$

となる。ここで $(Z_{in} - Z_0)/(Z_{in} + Z_0)$ を求めると、

$$\frac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0} = \frac{Z_{11}(Z_{22} + Z_0) - Z_{12}Z_{21} - Z_0(Z_{22} + Z_0)}{Z_{11}(Z_{22} + Z_0) - Z_{12}Z_{21} + Z_0(Z_{22} + Z_0)} = \frac{(Z_{11} - Z_0)(Z_{22} + Z_0) - Z_{12}Z_{21}}{(Z_{11} + Z_0)(Z_{22} + Z_0) - Z_{12}Z_{21}} = S_{11} \quad (\text{R1.7})$$

と(R1.3)式と等しくなり、入力ポートの反射係数 S_{11} に等しくなる。すなわち入力ポートの反射係数は

$$S_{11} = \frac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0} = \frac{Z_{in}/Z_0 - 1}{Z_{in}/Z_0 + 1} = \frac{z_{in} - 1}{z_{in} + 1} \quad (\text{R1.8})$$

で与えられることになる。

参考 2 共役整合

電源回路があり、この電源に接続した負荷インピーダンスに最も多くの電力を取り出すための条件は、(複素) 共役整合(参考 2 参照)のときである。特に電源回路の内部インピーダンスが実部(抵抗)のみである場合が多く、この時には負荷インピーダンスもこの抵抗値に等しければ最大電力が供給され、負荷で消費される(伝送される)ことになる。

電源回路の電圧源を E_g 、内部インピーダンスを $Z_g = R_g + jX_g$ とする。これに負荷インピーダンス $Z_L = R_L + jX_L$ が接続されているとき、負荷回路での複素電力 P は負荷インピーダンスの端子電圧を V_L 、電流を I_L とすれば

$$P = \frac{1}{2} V_L I_L^* = \frac{1}{2} \left\{ \frac{Z_L}{Z_g + Z_L} E_g \right\} \left\{ \frac{E_g}{Z_g + Z_L} \right\}^* = \frac{|E_g|^2}{2} \frac{Z_L}{|Z_g + Z_L|^2}$$

$$= \frac{|E_g|^2}{2} \frac{R_L + jX_L}{(R_g + R_L)^2 + (X_g + X_L)^2} \quad (\text{R2.1})$$

となる。この有効な実効電力（平均電力） P_{av} は複素電力の実部であるので、

$$P_{av} = \Re\{P\} = \frac{|E_g|^2}{2} \frac{R_L}{(R_g + R_L)^2 + (X_g + X_L)^2} \quad (\text{R2.2})$$

となる。この実効電力はリアクタンスの関係が $X_g + X_L = 0$ のとき、 $R_L = R_g$ であれば、最大となる。すなわち

$$Z_L = R_L + jX_L = R_g - jX_g = Z_g^* \quad (\text{R2.3})$$

の関係にあればよい。この関係は互いに共役複素数であるので、これを共役整合という。

参考3 インピーダンス(アドミッタンス)とスミスチャート

一般にスミスチャートと呼ばれるものは、前節の反射係数を表現する複素平面をインピーダンスやアドミッタンスを表現するものである。正規化インピーダンスを $z = r + jx$ とし、これを新しい複素平面 $w = u + jv$ の面で次の一次変換を行って表現する。

$$w = \frac{z-1}{z+1}, \quad z = \frac{1+w}{1-w} \quad (\text{R3.1})$$

複素直交座標系で表現される正規化インピーダンスは無限大まで広がる複素平面上にある。これに対し、変換した w 面では単位円内部に写像される。これは等角写像と呼ばれる手法であり、変換の関数（写像関数）は前述した反射係数と正規化インピーダンスの関係と同一の表現となっている。すなわち w 面は複素反射係数面と一致することになる。写像関数でそれぞれの面での成分で記述すると

$$u + jv = \frac{r + jx - 1}{r + jx + 1}, \quad r + jx = \frac{1 + u + jv}{1 - u - jv} \quad (\text{R3.2})$$

の関係にある。これを整理して w 面で正規化インピーダンスの実部 r と虚部 x が一定であるとき、どのように表現されるかを求めると次のようになる。

(R3.2)式の第2式から右辺を有理化して実部と虚部に分離する：

$$r + jx = \frac{1 + u + jv}{1 - u - jv} \Rightarrow r = \frac{1 - u^2 - v^2}{(1 - u)^2 + v^2}, \quad x = \frac{2v}{(1 - u)^2 + v^2} \quad (\text{R3.3})$$

実部から $1 + r$ を作り、整理すると

$$1 + r = \frac{2(1 - u)}{(1 - u)^2 + v^2} \Rightarrow (1 - u)^2 + v^2 = \frac{2(1 - u)}{(1 + r)} = \frac{2}{1 + r} - \frac{2u}{1 + r} \Rightarrow \left(u - \frac{r}{1 + r}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{(1 + r)^2} \quad (\text{R3.4})$$

となる。虚部から

$$(1 - u)^2 + v^2 = \frac{2v}{x} \Rightarrow (u - 1)^2 + \left(v - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2} \quad (\text{R3.5})$$

が求められる。これらは円の方程式を示している。この円群を表現したものを一般にスミスチャート (Smith chart) という。正規化インピーダンスを複素平面で表現した正規化インピーダンスとスミスチャート上の関係を調べると、

(1) 原点 $z(0, 0)$ は $w(-1, 0)$

(2) 虚軸は $r=0$ のときであり、これはスミスチャート上では

$$\left(u - \frac{r}{1+r}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{(r+1)^2} \quad (\text{R3.6})$$

となり、単位円

(3) 実軸は $x=0$ のときであるので、 u 軸に対応

(4) $z=\pm\infty$ は、 $w(1, 0)$ の点

(5) $z=\pm j\infty$ は、 $w(1, 0)$ の点

(6) $z(1, 0)$ の点は、 $w(0, 0)$ の点

となる。

.....